

**科学研究費助成事業 研究成果報告書**

平成 29 年 6 月 7 日現在

機関番号：15401

研究種目：基盤研究(C)（一般）

研究期間：2014～2016

課題番号：26381211

研究課題名（和文）数学教育における図式との相互作用による数学的思考の分析 - 認知と文化の視座から -

研究課題名（英文）Analysis of mathematical thinking in terms of interactions with a diagram in mathematics education: from the cognitive and cultural perspective

研究代表者

影山 和也 (Kageyama, Kazuya)

広島大学・教育学研究科・准教授

研究者番号：60432283

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 3,700,000円

研究成果の概要（和文）：本研究は、生徒の数学的思考は、図式（あるきまりにしたがって、紙などの上にかかれた図、表、記号）をかいたり使ったりすることと関わっていると捉え、その様相を明らかにすることである。図式は、もともとは身体行為や経験をもとにして作られる一方、そこにはアイデアが埋め込まれ伝承される。生徒はそれに働きかけることであるパターンや法則を仮説として記述し、図式を変形させてその成立範囲を調べることによって、数学的に考えることがわかった。

研究成果の概要（英文）：The purpose of this research is to understand students' mathematical thinking by supposing that it is related to constructing and using diagrams, which are inscriptions on a paper, such as figures, tables and signs, with certain rules. Diagrams are constructed originally through bodily actions or experiences, while these include some useful ideas and are handed on to the next. This research implied that students thought mathematically by reading a pattern or law to make a hypothesis and verifying the range in which they could deal with it as a theory.

研究分野：数学教育

キーワード：図式 数学的思考 身体化理論 記号論

### 1. 研究開始当初の背景

課題の解決に必要な思考力・判断力・表現力の育成がすべての教科教育に課せられる目標であることは、日本のみならず世界においても現代的動向といえる。その一方、各科教育研究において、教科特性を込めつつこれらを具体化することは、どのような教材を用いてどのように指導するべきかという教育的課題とともに、現在進行中の実際的な課題といえた。それゆえ、数学教育研究において改めて数学的思考を特徴づけること、特に「頭の中で起こる不可思議な現象」としてではなく誰でもしていることとして数学的思考を捉えることは、教科の差異化のためにも重要な取り組みであった。

数学的思考の研究はすでに広範に行われてきていたが、そこでは、数学的思考を分析的に見て、重要と思われるいくつかの要素を抽出し、それらの相互関連によって特徴づけをしたり、思考の進む過程を記述したりすることを主要なアプローチとしていた。その課題意識は、数学的思考の様相を理論的実証的に捉えるとともに、生徒はどこに難しさを感じるかを指摘することにあるといえる。本研究もこの路線に沿うのであるが、さらに教室で起こる数学的思考を対象とする必要があると考えた。そのために、数学的思考は、数や図形のような数学的対象と密接な関係があることを前提として、**<数学的対象は身体行為に起源を持つこと>**および**<数学的表現は多様多様であり、その解釈には文化性を伴うこと>**を基本的な柱とした。これらの観点は、数学的思考は、個人に起こる内的過程であるというだけでなく、文化的人工物である表現の解釈や使用を含むため、文化的過程でもあることを主張するものである。これらは、互いに相反する見方というよりも、教室での数学的思考がいかに豊かであることを示すのであり、従来の数学教育研究における思考研究をさらに進めることが期待された。これらの見方のいずれにも関連するのが、本研究のテーマである「図式」である。

数学教育研究において、「図式」は、認知科学や記号論、相互作用主義のような認識論、社会的実践を見る文化的-歴史的理論など、学際的に研究が進められるなかで注目されてきた。そこでは、ある短い時間で図式をつくりたり(図式の構成)、読んだり使ったりする(図式の使用と操作)だけではなく、数学的思考が進むことの一つのモデルとして、学習者と図式との連続的な相互作用が研究対象とされてきた。たとえば、あるルールのもとでの図式の操作や変形、図式の構造化と再解釈、他の図式との関係づけなど、多岐にわたる活動が含まれていることが指摘されてきた。このように、図式との相互作用によって、数学的思考を個々の活動としての認知と、教室での文化的実践とによって両義的に捉えることは、豊かな数学的思考を具体化する端緒となることが期待された。

### 2. 研究の目的

以上の動向をまとめると、本研究の目的は次のようになる：

**<図式の構成と使用、図式との相互作用によって数学的思考を捉え、認知と文化の視座から、生徒の数学的思考の様相を理論的実証的に検討すること>**

ここでいう図式は両義的に捉えられており、人による抽象化された経験や行為のパターンであると同時に、紙などの媒体上に記された印や記号の相互関係でもある。このように捉えることで、図式の構成と使用、相互作用の観点から、学際的な数学的思考研究が可能になり、教室での豊かな数学的思考を具体化することができる。

### 3. 研究の方法

上に述べた目的の達成のために、次のような3つの下位目標にわけて取り組むことにした。

- (1) 図式に関連する諸概念の整理を通して、特に数学の発展に寄与しうる機能を、認知と文化の視座から理論的に検討すること
- (2) 図式の構成と使用という観点から、数学的思考の記述と理論的再検討を行うこと
- (3) 図式との相互作用という観点から、授業における数学的思考の分析を行い、数学的思考研究における図式の理論化を図ること

本研究の課題意識は、図式の構成と使用、および図式との相互作用からみた数学的思考の具体化にあった。そのため、図式の持つ働きに注目して、文献解釈を主とする理論的検討と、授業観察を主とする実証的検討とを主な方法とした。

具体的には、本研究の鍵概念である図式概念の整理を行うために、図式を操作的に規定することを視野に入れつつ、特にその働きや考えられ得る有用性に注目し、身体的認知理論とその数学教育への援用を目指した文献、および文化的-歴史的視座からの数学教育への援用を目指した文献を参照した。また、図式概念の学際性を勘案して、記号論、特に図式的推論にまつわる文献および数学教育研究における表現研究のレビューを行った。これらのうち、文化的-歴史的視座からの発展を意図して、数学史とその認知的視座からの研究を参照した。

もう一方の実証的検討は、質的研究の枠組みにしたがいながら、教室で見られる図式の同定をねらいとして進めた。分析の視点は、「生徒はどのように図式を作り出し、使用しようとするか」というものであり、図式概念の整理を進めつつ、学校種を問わない形で同時並行的に進めることとした。

### 4. 研究成果

本研究の成果は、次の3点にまとめられる。一つは、図式の概念整理を行い、当初の想定にしたがって身体化理論と記号論との両面から特徴づけたことである。端的にいうならば、図式には構成のためのルールと使用および操作のためのルールとがあることの指摘である。このような図式の特徴づけから示唆される数学的思考は、一方では身体行為に根ざしつつも、もう一方ではより高次に進むためには、これらのルールそのものを認識することが求められるというものである（**下位目標(1)**）。

図式についての認知（図式は身体行為や経験をもとにしてかけられること）と文化（誰がみても意味がわかり、アイデアを生み出すような図式は伝承されること）は研究当初から注目していたことであったが、数学の発展の歴史（数学史）に図式の変化が伴うことに注目することで、運動や無限、極限などを考察可能な対象にしてきたことが指摘された。記号の発明は数学の発展に大きく貢献したことは多くの文献が指摘することながら、その背景には、図式としての記号という扱い、つまり記号を処理する文法だけではなく、（それを超えるような）平面上の記号の配列の認識こそがあるという主張は、本研究の成果といえる。

次に、特に記号論からの示唆であるが、図式を伴う数学的思考の一連の過程を、「実験」をキーワードとしてまとめたことである（**下位目標(2)**）。

実験とは、基本的には、仮説 - 検証の繰り返しといえる。

学校数学には、演算規則を表す図式、面積の相等関係を表す図式、数列の公式を導く式の配列による図式など、多くの事例がある。これらに共通するのは、これらを読みだりかいたり、使ったりする際に、何らかのパターンや法則を仮説として記述し、その仮説がどの範囲まで成り立つかを、ルールにしたがった図式の変形や操作を通して検証し、最後に、成立範囲を規定した上で定理として証明しまとめていく過程があるという点である。本研究の射程では、この過程を反映させる数学科授業づくりにまではいたっていないが、今後の数学教育研究において、特に数学的表現研究を進めるための重要な基盤を与えるといえる。

最後に、「数学的对象としての図形」をテーマとした授業の観察を通して、図式との相互作用によって数学的对象をつくっていく過程は、対象の構成と生成の繰り返しであることを指摘したことである。この繰り返しは単なる一本道ではなく紆余曲折があり、数学的に考えることを支える多様な世界があることが示唆された（**下位目標(3)**）。

概念整理を行ったように、図式は基本的にはかかれたものであり、知覚的にみたり触れたりすることができる。しかしながら、数学的思考はそれへの身体行為を通じた働きかけから生まれるのであり、それは決して図式が物理的に存在する世界（「**実際世界**」）にあるのではなく、その世界に同居しつつも抽象される世界（「**仮想世界**」）のなかでこそ実現されうる（図1；影山（2016）より）。とい

行為を取り巻く世界	行為の様相	場の特徴
<p>&lt;実際世界&gt;</p> <p>物理法則、公的な規則が支配している世界。</p>	経験場	<p>[対象の存在と生成]知覚可能・操作可能な対象のみ存在しうる。それらはいずれも身体行為(構成, 分解, 変形, ...)の対象であるとともに、仮想世界における対象のためのモデルでありうる。集める, 組み合わせる, 変形する等々の作る行為によって対象を生成する。</p> <p>[行為の様相]上記の法則や規則, 身体・環境の構造, 対象・環境からのアフォードに依存する。</p>
<p>&lt;仮想世界&gt;</p> <p>概念, 論理, 理論が支配している世界。実際世界を抽象し, 内在させて拡張させる方向と, 公理・定義の設定によって意図的に作り出す方向とがある。</p>	可能場	<p>[対象の存在と生成]思考実験としての操作(可逆性, 再現性, ...)が可能な対象のみ存在しうる。内面化した経験場での行為によって対象を生成する。</p> <p>[行為の様相]経験場の様相の抽象および思考実験の規準に依存する。イメージやメタファーを伴う行為はここに準ずる。</p>
	理論場	<p>[対象の存在と生成]公理・定義からの推論(演繹, 帰納, 類推など)による導出が認められる対象のみ存在しうる。公理・定義自体は社会・文化・歴史による交渉を通して作られるが, 対象は推論によって生成される。存在が推論によるため常に可謬的であるものの, 生成のための手順は明確である。</p> <p>[行為の様相]公理・定義とともに, 社会・文化・歴史のなかで認められた規則, 特に記号の使用規則としての文法および証明の規準に依存する。</p>

図1 二世界を伴う行為の様相論（影山,2016,p.12）

うのも、かかれた図式それ自身は働きかけがないうちは紙の上では動かないけれども、変形のルールにしがたって図式を操作したり読んだりすることによって促される身体行為は、同時に知覚的には把握されえない対象や動きを含む。この両者を媒介するのが本研究のテーマである図式であり、図式の扱い方によって行為をも変わることを、各世界がかもし出す場として、図1は示している。

#### 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計4件)

1 影山和也. 「現成主義の視座からみた行為の様相と数学的知り方の特質」. 日本数学教育学会『数学教育学論究 臨時増刊』, 第98巻, 9-16. 2016. [査読有]

2 影山和也・和田信哉・岩田耕司・山田篤史・岡崎正和. 「数学教育における図式との相互作用による数学的思考の分析」. 全国数学教育学会, 『数学教育学研究』, 第22巻, 第2号, 163-174. 2016. [査読有]

3 山田篤史. 「数学教育における表現研究の立場からみた割合指導の困難性と方向性」. 『イブシロン』, 第58巻, 21-34. 2016. [査読無]

4 影山和也. 「為すこととしての数学的認知論の基礎的考察」. 日本数学教育学会『数学教育学論究 臨時増刊』, 第97巻, 65-72. 2015. [査読有]

[学会発表](計4件)

1 Kazuya Kageyama. What are the driving forces to have students notice mathematically?. At the 13<sup>th</sup> International Congress on Mathematical Education(TSG27), Hamburg, Germany: ICME. July 26, 2016.

2 Kazuya Kageyama. The nature of embodied mathematical objects. At the 40th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Szeged, Hungary: PME. August 4, 2016.

3 影山和也. 「身体化理論の視座からの数学的对象論の展開」. 日本数学教育学会第4回春期研究大会, 埼玉大学. 2016年6月12日.

4 Kazuya Kageyama. Toward theorizing the embodiment of mathematical cognition in the classroom. At the 38th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Vancouver, Canada: PME. July 19, 2014.

[図書](計0件)

[産業財産権]

○出願状況(計0件)

名称:  
発明者:  
権利者:  
種類:  
番号:  
出願年月日:  
国内外の別:

○取得状況(計 件)

名称:  
発明者:  
権利者:  
種類:  
番号:  
取得年月日:  
国内外の別:

[その他]  
ホームページ等

#### 6. 研究組織

(1)研究代表者

影山 和也 (KAGEYAMA, Kazuya)  
広島大学・大学院教育学研究科・准教授  
研究者番号: 6 0 4 3 2 2 8 3

(2)研究分担者

山田 篤史 (YAMADA, Atushi)  
愛知教育大学・教育学部・教授  
研究者番号: 2 0 2 7 3 8 2 3

岡崎 正和 (OKAZAKI, Masakazu)  
岡山大学・大学院教育学研究科・教授  
研究者番号: 4 0 3 0 3 1 9 3

和田 信哉 (WADA, Shinya)  
鹿児島大学・法文教育学域教育学系・准教授  
研究者番号: 6 0 3 7 2 4 7 1

岩田 耕司 (IWATA, Koji)  
福岡教育大学・教育学部・准教授  
研究者番号: 9 0 4 3 7 5 4 1

(3)連携研究者

( )

研究者番号:

(4)研究協力者

( )