

平成 30 年 6 月 18 日現在

機関番号：15201

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2014～2017

課題番号：26400015

研究課題名(和文) 代数体の整数環のK群に関する総合的研究

研究課題名(英文) A study on K groups of the ring of integers of number fields

研究代表者

青木 美穂 (Aoki, Miho)

島根大学・総合理工学研究科・准教授

研究者番号：10381451

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 2,900,000円

研究成果の概要(和文)：総実代数体上のCM拡大体に対し、拡大次数に関する技術的な仮定のもと、以前の研究で得られていた偶数次K群の annihilatorイデアルの奇素数部分に関する結果を、Fittingイデアルに拡張した。拡大体がCM体の場合、総実代数体の場合と異なり、コホモロジー群の localization map が複雑になるが、部分ゼータ関数の特殊値から構成される高次Stickelberger 元 を localization map の核と像に対応して分解することにより、結果を得た。

研究成果の概要(英文)：The results for the CM extension over the total real number field obtained in the previous research on the odd prime part of annihilator ideas of the K groups of the ring of integers have been extended to the Fitting ideal under the technical assumption on the degree of the extension.

When the extension field is a CM field, the localization map of the cohomology group becomes complicated, compared to the case of the total real field, but by decomposing the higher Stickelberger elements defined by the special values of the partial zeta function to the annihilators of the kernel and image of the localization map, we were able to obtain the results.

研究分野：数論

キーワード：代数的K群 岩澤加群 イデアル類群 単数群 Coates-Sinnott予想 CM体 Fittingイデアル 高次Stickelberger 元

1. 研究開始当初の背景

古典的な代数的整数論におけるイデアル類群や単数群などは、その代数体の整数環に関する重要不変量であり、これらは D. Quillen によって幾何的に定義された代数体の整数環の K 群の一部とみなすことができる。

この群は、ガロアコホモロジーや岩澤加群などの代数的な群で記述することにより、その構造に対し多くの情報を得ることができる。また代数的整数論で証明されていた類数公式やイデアル類群の annihilator に関する定理は K 群に自然に拡張されるが、関連する多くの問題が未解決のまま残されている。

2. 研究の目的

F を総実代数体 k 上の有限次アーベル拡大体とし、そのガロア群を G とおく。部分ゼータ関数の 0 以下の整数 n における特殊値で定義される高次 Stickelberger 元が偶数次 K 群の annihilator になると主張が Coates-Sinnott 予想である。偶数次の K 群は $n=0$ のときを除き、有限群であることが分かっている。 $n=0$ のときの Coates-Sinnott 予想は Brumer 予想であり、さらに基礎体 k が有理数体の場合は Stickelberger の古典的な結果として知られている。

Brumer 予想は、拡大次数と岩澤不変量に関する仮定のもと、岩澤主予想を用いた結果が A. Wiles, C. Greither, T. Nguyen Quang Do, D. Burnes らによって得られている。

研究の目的は、代数体の整数環に関する諸問題のうち、Coates-Sinnott 予に関する研究とそれに関連した代数的不変量の組織的計算例を作成することである。理論的な結果としては、annihilator イデアルより精密な情報が得られる Fitting イデアルに関する定式化を試みる。この定式化は特に、M. Kolster (2002 年、 F が有理数体上のアーベル拡大のとき)、J. Voight (2008 年、 F が一般の CM 体のとき)らによって示された K 群に関する一般相対類数公式を導く。 $n=0$ の場合、この一般総実類数公式は古典的な相対類数公式と一致する。

代数体の類数や偶数次 K 群の位数を求めることは一般に難しいが、相対類数や一般相対類数は単数の影響が少ないため、比較的計算できる値であり、 CM 拡大体の類数問題において重要な役割を果たす。相対類数は最近、多くの研究者によって実例計算が進められ、その結果が岩澤理論などの実例構成に応用されている。本研究では、 K 群の一般相対類数の計算を行うことも目標とする。

3. 研究の方法

拡大体 F が総実代数体の場合、偶数次 K 群は岩澤加群の商で綺麗に表せるが、 CM 体の場

合は少しずれがある。D. Popescu による F が総実代数体の場合の Fitting イデアルの手法と、以前の研究で考察したコホモロジーの localization map の像を上手に分解する手法を組み合わせる。

また一般相対類数の具体的計算例構成については、代数的手法と組合せ論的手法を組み合わせ、実際の計算には計算機ソフト Magma を用いる。

4. 研究成果

総実代数体上の CM 拡大体に対し、拡大次数に関する技術的な仮定のもと、以前の研究で得られていた偶数次 K 群の annihilator イデアルの奇素数部分に関する結果を、Fitting イデアルに拡張した。拡大体が CM 体の場合、総実代数体の場合と異なり、コホモロジー群の localization map が複雑になるが、部分ゼータ関数の特殊値から構成される高次 Stickelberger 元を localization map の核と像に対応して分解することにより、結果を得ることができた。

総実代数体上の CM 拡大の中間体に関する結果も、拡大体のガロア群が対称群になる場合に、中間体の偶数次 K 群の annihilator イデアルや Fitting イデアルに関して研究を行い、低次の場合については、いくつかの条件のもと、同様の結果が得られた。

ただし、一般的な高次の Fitting イデアルに関する結果を得ることは出来ず、従来の方法では計算が複雑になり、部分的な結果しか得ることができなかった。また通常の Fitting イデアルに関する結果も複雑な形をしており、結果を簡略化することが必要である。

また、代数的 K 群のガロア加群としての精密な情報を得るためには、部分ゼータ関数のみではなく、さらなる解析的な情報と新しいアイデアが必要であると考えられる。

本研究の具体例構成に関しては、以下に述べるような共同研究を行った。

愛知教育大学の岸康弘氏との共同研究では、与えられた素数 p に対し、 p で割れる類数をもつ有理数体上 $(p-1)/2$ 次の拡大体のペアの無限族を具体的に構成し、論文にまとめ雑誌に投稿した。これは 2017 年に Journal of Number Theory で発表した $p=5$ の結果の大きな拡張になっている。証明には、2015 年に International Journal of Number Theory で発表した単数を根にもつ 4 次多項式の族に関する結果、ガウス和とヤコビ和の計算、2 次体の基本単数の情報をもつ 2 次の線形回帰数列、ある有限体上の曲線に関する Weil 予想の帰結、Lenstra の原始根に関する Artin 予想の一般化に関する結果などを用いた。またこの結果を応用し、与えられた素数 p に対し、位数が p で割れる偶数次 K 群をもつ有理数体上 $(p-1)/2$ 次の拡大体のペアの無限族を具体的に構成できることを確認し

た. さらに計算機ソフト Magma を用いて, 計
実例計算を行い, 類数と K 群の位数に関する
表を作成した.

学生の酒井悠帆氏と行った 2 次の線形回帰
数列の素数における可除性の研究は, 1969 年,
Laxton によって定義された線形回帰数列の
群構造に関する研究 (On groups of linear
recurrences. I, Duke Math. J. 36, 721-736)
に繋がった. またこの研究はイデアル類群
や K 群の位数に関する具体例構成にも応用さ
れた.

武漢大学の小松尚夫氏とは超幾何関数か
ら定義される 2 種類の数列 Hypergeometric
Bernoulli numbers と Hypergeometric
Cauchy numbers について研究を行い, それぞ
れ論文にまとめた. 特にこの研究で扱った
Hypergeometric Bernoulli numbers を一般
ベルヌーイ数へ拡張した数列は, 有理数体
上のアーベル拡大体のイデアル類群や K 群の
構造の情報を与えることが期待される.

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者に
は下線)

[雑誌論文](計 8 件)

Miho Aoki, Takao Komatsu, Remarks on
Hypergeometric Cauchy numbers, to appear
in Math. Reports, 査読有.

Miho Aoki, Yuho Sakai, Mod p
equivalence classes of linear recurrence
sequences of degree 2, Rocky Mountain
Journal of Mathematics, 47, No. 8,
2513-2533, (2017), 査読有.

Miho Aoki, Yasuhiro Kishi, An infinite
family of pairs of imaginary quadratic
fields with both class numbers divisible
by five, Journal of Number Theory, 176,
333-343, (2017), 査読有.

青木 美穂, 一般 Lucas sequence の可除
性と Laxton 群, 第 9 回数論女性の集まり報
告集, 1 10, (2016), 査読無.

Miho Aoki, Yuho Sakai, On Equivalence
Classes of Generalized Fibonacci
sequences, Journal of Integer Sequences,
19, Article 16.2.6, (2016), 査読有.

Miho Aoki, Yasuhiro Kishi, On systems
of fundamental units of certain quartic
fields, International Journal of Number
Theory, 11, No. 7, 2019-2035, (2015), 査
読有.

Miho Aoki, Yuho Sakai, On divisibility
of generalized Fibonacci numbers,

Integers, 15, Paper No. A31, (2015), 査
読有.

青木 美穂, 岸 康弘, ある 4 次多項式と
基本単数系, 第 9 回福岡数論研究集会報告集,
91 107, (2014), 査読無.

[学会発表](計 14 件)

青木 美穂, A family of pairs of
imaginary cyclic fields with both class
numbers divisible by p , School of
Mathematics and Statistics 談話会, 武漢
大学 (中国), 2017 年 9 月 28 日.

青木 美穂, Laxton 群の構造と 2 次体の整
数論について, 半田山・幾何・代数セミナー,
岡山理科大学, 2017 年 2 月 22 日.

青木 美穂, アーベル数体の組の類数の
可除性について, 神楽坂代数セミナー, 東
京理科大学大学院理学研究科, 2017 年 1 月
12 日.

Miho Aoki, Yasuhiro Kishi, An infinite
family of pairs of abelian number fields
with both class numbers divisible by p ,
KICM 2016, International Conference on
Mathematics, Number Theory, Graph Theory
and Applications, King Mongkut's
Institute of Technology Ladkrabang, バン
コク (タイ), 2016 年 12 月 22 日.

Miho Aoki, Yuho Sakai, Mod p
equivalence classes of linear recurrences
of degree two, 17th International
Conference on Fibonacci Numbers and Their
Applications, University of Caen, カン(フ
ランス), 2016 年 6 月 28 日.

青木 美穂, 虚二次体の組の類数の可除
性について, 新潟代数セミナー, 新潟大学
大学院自然科学研究科, 2016 年 6 月 21 日.

青木 美穂, 酒井 悠帆, 一般 Lucas
sequence の可除性と Laxton 群, 第 9 回数論
女性の集まり, 上智大学, 2016 年 5 月 21 日.

Miho Aoki, Yuho Sakai, On equivalence
classes of generalized Fibonacci
sequences associated to units of real
quadratic fields, International
Conference on Diophantine Analysis and
Related Topics, Wuhan University, 武漢(中
国), 2016 年 3 月 11 日.

岸 康弘, 青木 美穂, 類数が 5 で割れる
虚 2 次体のペアの無限族について, 日本数
学会 中国・四国支部例会, 広島大学, 2016
年 1 月 24 日.

青木 美穂, 代数体の整数環の K 群の annihilator について, 2015 大分整数論研究集会, ホルトホール大分, 2015 年 9 月 2 日.

Miho Aoki, Yasuhiro Kishi, Systems of fundamental units of quartic fields and imaginary quadratic fields with class number divisible by five, 29th Journées Arithmétiques, University of Debrecen, デブレツェン(ハンガリー), 2015 年 7 月 9 日.

岸 康弘, 青木 美穂, ある 4 次多項式と基本単数系, 日本数学会 中国・四国支部例会, 徳島大学, 2015 年 1 月 25 日.

代数体の類数について, 青木 美穂, 福田隆先生還暦記念セミナー, 早稲田大学, 2014 年 11 月 1 日.

青木 美穂, 岸 康弘, ある 4 次多項式と基本単数系, 第 9 回福岡数論研究集会, 立命館アジア太平洋大学, 2014 年 9 月 4 日.

6. 研究組織

(1) 研究代表者

青木 美穂 (AOKI, Miho)

島根大学・総合理工学研究科・准教授

研究者番号: 10381451