

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 29 年 4 月 14 日現在

機関番号：34304

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2014～2016

課題番号：26400027

研究課題名(和文) 保型形式の対称性とBorcherds積の研究

研究課題名(英文) Studies on symmetries for automorphic forms and Borcherds products

研究代表者

村瀬 篤 (MURASE, Atsushi)

京都産業大学・理学部・教授

研究者番号：40157772

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,600,000円

研究成果の概要(和文)：2次ジーゲルモジュラー群の合同部分群に関する正則ジーゲル保型形式について、無限積表示を持つための条件を考察した。そのために、様々なレベルを持つ保型形式のファミリーを考え、それらが満たすある対称性(一般化された積対称性)を導入した。さらに、無限積表示を持つ保型形式のファミリーが、一般化された積対称性を満たすことを示した。また、ヤコビ形式についても、同様の問題を考察し、無限積表示を持つ条件と一般化された積対称性の関連について考察した。

正則2次ジーゲル保型形式のうち、斎藤-黒川リフトとBorcherds積の双方を兼ねているものは、井草モジュラー形式に限ることを証明した。

研究成果の概要(英文)：We investigated on a condition for Siegel modular forms on congruence subgroups to have infinite product expansions. We define a notion of “generalized multiplicative symmetries” for a family of automorphic forms on various levels. We furthermore show that a family of automorphic forms with infinite product expansions satisfies generalized multiplicative symmetries. We also considered a similar problem for Jacobi forms and investigated a relation between infinite product expansions and generalized multiplicative symmetries.

We show that a Siegel modular form of degree 2 of level 1 which is simultaneously an Saito-Kurokawa lift and a Borcherds product is a constant multiple of the Igusa modular form.

研究分野：整数論

キーワード：保型形式 対称性 Borcherds積

1. 研究開始当初の背景

Borcherds 積は、無限積で表される保型形式であり、零点や極が明示的にわかるという意味で極めて特異な保型形式である。Borcherds 積は、Borcherds が有限単純群と保型形式のあいだの不思議な関係に関するモンスター予想を解決する過程で発想されたものと考えられる。また、カツ・ムーディ・リー環等の無限次元 Lie 環の表現論における分母公式は、無限和と無限積を結びつける公式であるが、ある場合には保型性を持つことが知られており、このようなものは、しばしば Borcherds 積として捉えることができる。これら以外にも、Borcherds 積は、算術幾何や数理論理学(超弦理論等)など様々な分野の数学と深い関係を持つに至り、数学の対象として、極めて重要なものと考えられる。

Borcherds 積が保型形式全体の中でどのような特性を持つものとして特徴付けることができるかは、Borcherds 積の理論において基本的問題である。この問題に対する最初の試みは、Bruinier によって行われ、Borcherds 積を、因子が Heegner 因子(2次多項式の零点集合)の整数係数和として書ける保型形式として特徴付けた。この代数幾何的な特徴付けは、美しい結果であるが、具体的な保型形式に対して、この判定基準を確かめるのは一般に困難であり、より保型形式論的な定式化で、数値的なチェックがしやすい特徴付けが望まれていた。科学研究費基盤(C)「多変数保型形式の数論的不変量と保型 L 関数の研究」(平成23年度-平成25年度)の援助を受けた研究(B. Heim 氏との共同研究)において、研究代表者は、レベル1のフルモジュラー群に関する正則な保型形式がある対称性(積対称性)を満たすことと、その保型形式が Borcherds 積であることは同値であることを示した。積対称性は、数値的なチェックが比較的簡単にでき、応用として、2次ジューゲル・アイゼンシュタイン級数が Borcherds 積ではないことを示すことができた。この結果を様々な方向へ一般化することが、次の課題であった。一般化の方向としては、極を持つ有理型保型形式の場合に考察することと、レベルが2以上の合同部分群上の保型形式を考察することの2つが考えられていた。

2. 研究の目的

正則では無く極を持つ有理型の保型形式の場合に、Borcherds 積が積対称性によって特徴付けられることを示すことが研究当初の目的だったが、正則で無いため、保型形式の定義域全体ではフーリエ展開できないなどの困難が生じ、現在のところ、適切な研究方法が見つかっていない。もうひとつの興味深い一般化として、合同部分群上の正則保型形式について、Borcherds 積を適切に定義し、それらを新たな積対称性によって特徴付けることを目的とした。また、関連して、ヤコビ形式についても、同様の課題を考察するこ

とを目的とした。ヤコビ形式の場合は、無限積として表示されるものの重要な例として、アフィンリー環論の分母公式として表されるヤコビ形式があり、分母公式と対称性の関係を究明することは興味深い課題である。

一方で、数理論理学においては、同時に斎藤・黒川リフトであり、かつ Borcherds 積であるものがしばしば考察されており、超弦理論に重要な役割を果たす。このようなものとして、井草モジュラー形式が Gritsenko - Nikulin によって知られていたが、レベル1のフルモジュラー群上の保型形式でこのような性質をもつものがこれ以外にも存在するかどうか調べることも目的とした。

3. 研究の方法

合同部分群上の正則な2次ジューゲル保型形式について、Borcherds 積の理論が青木-伊吹山によって考察されている。Borcherds 積が満たす積対称性を考察するには、ある合同部分群上の保型形式を単独で考えるだけでは不十分であり、うまくいかない。この困難を克服するために、保型形式のファミリー(様々なレベルの合同部分群上のもの)を導入し、それらについて、Borcherds 積のファミリーと、ファミリーのメンバーの間の積対称性を定義するという新しいアイデアに基づいて研究を進めた。また、並行して、ヤコビ形式についても、様々なレベルを持つヤコビ形式のファミリーについて、無限積表示を持つことと、ある種の対称性との関連について研究を進めた。

さて、斎藤-黒川リフトである保型形式はそのフーリエ・ヤコビ展開係数がある漸化式を満たす。一方で、Borcherds 積である保型形式は、そのフーリエ・ヤコビ展開係数の商がある漸化式を満たす。この2つの異なる漸化式を組み合わせることによって、同時に斎藤-黒川リフトであり、Borcherds 積であるものについて、研究を行った。

4. 研究成果

(1) 様々なレベルを持つヘッケ型の合同部分群上の正則な2次ジューゲル保型形式のファミリーについて、一般化された Borcherds 積のファミリーの適切な定義を与えることができた。すなわち、 D を1以上の整数とし、 D の約数 s をレベルに持つ概正則ヤコビ形式(定義域では正則であるが、カスプでは極を許すもの)のファミリー $\{g(s)\}$ が与えられたとき、 $g(s)$ のフーリエ展開係数を積因子の指数に持つような無限積のファミリー $\{f(s)\}$ を構成することができる。 $f(s)$ はレベル s の保型性を持つことを示すことができる。ファミリー $\{f(s)\}$ を、ヤコビ形式のファミリー $\{g(s)\}$ に付随する Borcherds 積のファミリーという。青木-伊吹山の論文には、レベル2のヘッケ型の合同部分群上の正則2次ジューゲル保型形式のなす環の生成元のいくつかが無限積表示を持つことが示されているが、上

記の構成の応用として、それら以外にも青木-伊吹山の論文で述べられている生成元の中に無限積表示を持つものがあることを示すことができた。

(2) D を 1 以上の整数とし、 D の約数レベル s を持つ 2 次ジークル保型形式 $f(d)$ のファミリー $\{f(s)\}$ を考える。本研究において、ファミリー $\{f(s)\}$ に対する一般化された積対称性を導入した。一般化された積対称性とは、 $f(s)$ たちに対して 2 通り定義される Hecke 作用素型の作用に関して等式が成り立つという対称性である。より具体的には、

$$f(as)((az+b)/d, w, z') = (p) f(as)(z, w, (az'+b)/d)$$

((p) は零でない複素数、 $ad=p$, $b=0, 1, \dots, d-1$) という等式がすべての素数 p に対して成立するとき、ファミリー $\{f(s)\}$ は一般化された積対称性を満たすという。

主要な結果として、ファミリー $\{f(s)\}$ は一般化された積対称性を満たすならば、 $f(s)$ のフーリエ・ヤコビ展開係数の商たちが、ある漸化式を満たすことを示した。また、(1) で述べた Borchers 積のファミリーが一般化された積対称性を満たすことを証明することができた。この判定法の利点は、合同部分群上の保型形式のファミリーが一般化された Borchers 積になるかどうか調べる場合に、一般化された積対称性を満たすかどうか数値的に検証しやすいということである。実際、この手法を用いて、青木-伊吹山の論文で述べられている生成元の中に無限積表示を持たないものがあることを示した。

(3) ベクトル系 (格子上のコンパクトなサポートを持ち、かつある対称性を満たす関数) のファミリーに対し、無限積のファミリーを構成し、それらが様々なレベルを持つヤコビ形式のファミリーになることを示した。

(4) 様々なレベルを持つヤコビ形式のファミリーについて、(2) で述べたものに類似する一般化された積対称性を導入した。(3) のヤコビ形式のファミリーが一般化された積対称性を持つことを示した。

(5) 捻られたアフィンリー環の分母公式として表されるヤコビ形式について、(3) で述べたヤコビ形式のファミリーのメンバーになることを示した。このファミリーの他のメンバーが、元の捻られたアフィンリー環といかなる関係を持つか研究することは興味深い問題である。

(6) レベル 1, 重み 10 の 2 次ジークル尖点形式は、井草モジュラー形式と呼ばれ、多変数保型形式の理論や代数幾何学に加えて、超弦理論等の数理物理学においても重要な役割を果たしている。たとえば、超弦理論の様々なモデルにおいて、ある物理状態の状態数の母関数として現れる。本研究では、レベル 1 の 2 次ジークル尖点形式のうち、斎藤-黒川リフトかつ Borchers 積であるものは、井草モジュラー形式の定数倍に限ることを示した。

(7) 2 次四元数ユニタリ群上の保型形式においては、正則性の概念はないものの、コホモロジカルな表現に対応する興味深い保型形式の系列が存在し、正則性に近い様々な性質を持つ。このような保型形式で、斎藤-黒川リフトに類するものがあるか研究しており、フーリエ展開を直接与えるという手法で候補を与えたが、最終的結論には至っていない。

以上述べた結果 (1) - (6) は、研究協力者の B. Heim 氏との共同研究である。また、結果 (7) は連携研究者の成田宏秋氏との共同研究である。

さて、Bruinier は、有理型保型形式が Borchers 積を持つことと、因子が Heegner 因子の整数結合で表されることが同値であることを解析的な手法で示している。Bruinier は、最近の論文において、本研究の応用として、上記の代数幾何学的特徴付けに関する結果が比較的簡単に導けることを示した。これは、Borchers 積の理論において、積対称性が本質的であることを示唆している。

今後の課題は、積対称性を満たす合同部分群上の正則な 2 次ジークル保型形式のファミリーが Borchers 積になることを示すことである。また、これらの結果を、一般の符号 $(2, m)$ の直交群について一般化することも重要な課題である。また、合同部分群上の斎藤-黒川リフトに関しては、伊吹山氏等による研究があるが、合同部分群上の斎藤-黒川リフトのある種の対称性 (和対称性) を持つ保型形式として特徴付けることは、保型形式論の重要な課題である。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計 4 件)

A. Murase and H. Narita, "Fourier expansion of Arakawa lifting II: Relation with central L-values", International Journal of Mathematics, 27, No. 1 (2016), 1650001-1650032 (査読有)。

B. Heim and A. Murase, "Characterization of Holomorphic Borchers Lifts by Symmetries", International Mathematics Research Notices, 21 (2015), 11150-11185 (査読有)。

B. Heim and A. Murase, "Reversing Borchers Lifts: a survey", in Automorphic forms, Springer Proceedings in Mathematics & Statistics, 115 (2014), 93-101 (査読有)。

B. Heim and A. Murase, "Additive and

multiplicative lifting properties of the Igusa modular forms”, in Automorphic forms, Springer Proceedings in Mathematics & Statistics, 115 (2014), 103-117 (査読有).

[学会発表](計 1 件)

A. Murase, “Symmetries characterizing Borcherds lifts”, Workshop on automorphic forms at Kumamoto, 熊本大学理学部 (熊本県・熊本市) 2015年1月7日

6. 研究組織

(1) 研究代表者

村瀬 篤 (MURASE, Atsushi)
京都産業大学・理学部・教授
研究者番号：40157772

(2) 連携研究者

成田 宏秋 (NARITA, Hiroaki)
熊本大学・大学院自然科学研究科・准教授
研究者番号：70433315

(3) 研究協力者

菅野 孝史 (SUGANO, Takashi)
金沢大学・理工研究域数物科学系・教授
研究者番号：30183841

(4) 研究協力者

Bernhard Heim
German University of Technology
(Oman)・教授