2版

様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９－１、Ｚ－１９　（共通）

科研費 KAKENHI

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 ３０ 年　 ５ 月 １７ 日現在

機関番号：１０１０１
研究種目：基盤研究(C)（一般）
研究期間：2014～2017
課題番号：２６４０００３２
研究課題名（和文）ラグランジアンファイブレーションの組織的構成

研究課題名（英文）Construction of Lagrangian fibrations

研究代表者
松下　大介（MATSUSHITA, Daisuke）

北海道大学・理学研究院・准教授

研究者番号：９０３３３５９１

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　3,300,000円

研究成果の概要（和文）：複素構造の変形を利用して，既約シンプレクティック多様体の第二コホモロジー群の元が定める線型系と自己同型群について調べた．前者に関しては，既約シンプレクティック多様体の複素構造の変形の空間の中で豊富な第二コホモロジー群の元が定める線型系が写像を定める部分と埋め込みを定める部分は共に開集合であることを示した．後者に関しては，複素構造を適当に変形することで，自己同型群は階数が第二ベッチ数から二を引いた無限巡回群を含むことを示した．

研究成果の概要（英文）：We investigated the linear system associated to ample divisors and an automorphism group of an irreducible symplectic manifold using deformation of complex structure. Regarding the former, we obtain the following
result. Let X be the set of the complex structures which defining the mapping and Y the set of the complex structures which defining the embedding in the projective space. Both X and Y are open in the space of deformation of the complex structures of irreducible symplectic manifolds. With respect to the latter, by appropriately deforming the complex structure, we prove that an automorphism group of irreducible symplectic manifold contain an infinite cyclic group whose rank equals to the second Betti number minus two.

研究分野：高次元代数幾何学

キーワード：シンプレクティック　ラグランジアン

１．研究開始当初の背景

コンパクトなケーラー多様体で標準因子と呼ばれる量が零であるような多様体は，複素幾何あるいは代数幾何で多くの注目を集めている種類の多様体であり，物理学の方からも興味を持たれている．この種の多様体はある有限被覆を取ると，複素トーラス，Calabi-Yau 多様体, 既約シンプレクティック多様体の直積に分解することが知られている．既約シンプレクティック多様体の定義は, 単連結であり，正則シンプレクティック形式を一次元分しか持たない，というものである. この条件を満たす最も簡単な例は K3 曲面であるが，既約シンプレクティック多様体は K3 曲面と多くの幾何的に類似する性質を持つことが期待されていた．実際既約シンプレクティック多様体の研究が始まった早い段階で K3 曲面に現れる概念や基本的な定理が既約シンプレクティック多様体に拡張されている．K3 曲面の上にカップ積に関する自己交点数が零の第二コホモロジー群の元がある時，その K3 曲面から射影直線への写像があり，一般ファイバーは楕円曲線となることは良く知られている（K3 曲面の楕円ファイバー構造）．この現象の一つの高次元化として，既約シンプレクティック多様体の上にカップ積を高次元化した Beauville-Bogomolov 二次形式に関して自己交点数が零の第二コホモロジー群の元がある時，その既約シンプレクティック多様体から半分の次元の射影空間に写像があり，像は射影空間，一般ファイバーは複素トーラスとなるであろう，という予想(*)が建てられている. この予想(*)は一見主張が強すぎるように見えるが，K3 曲面と Abel 曲面のモジュライとして得られる既約シンプレクティック多様体及びそれらに変形同値な物に対しては成立することが知られている．一方その解決方法は K3 曲面あるいは Abel 曲面の線型系と層のモジュライの持つ特殊な関係性を利用するもので，一般の既約シンプレクティック多様体に適用することは出来ない．他の具体例に当たるにしても，既約シンプレクティック多様体の知られている具体例は極めて少なく，K3 曲面あるいは Abel 曲面の上の層のモジュライ空間として得られるもの以外は 6 次元と 10 次元に一つずつあるだけで，それらを調べて一般的な手法を見出すには具体例の数が乏しすぎ，より多くの具体例を，可能であれば組織的に構成することが求められていた.

２．研究の目的

以下の二つを主な目標として取り組んだ.

（1）． 予想(*)で存在が予想されている写像をラグランジアンファイブレーションと呼ぶ. このラグランジアンファイブレーションを持つ既約シンプレクティック多様体の具体的な構成方法を確立する. その際, 構成した既約シンプレクティック多様体の位相的不変量の計算方法も合わせて確立するように努める.

（2）． 予想(*)を 1 の作業の途中で得られた知見を活かして一般の既約シンプレクティック多様体に関して解決する.

３．研究の方法

目的達成に向けて，以下の三つの方針に従って研究を行った.

（1）． **K3 曲面の構成方法の見直し**:K3 曲面で楕円ファイバー構造を持つものの一つの構成方法として, 射影直線の直積の二重被覆を取るというやり方がある. この手法の高次元化を考える.

（2）． **ラグランジアンファイブレーションの不変量**:ラグランジアンファイブレーションは複素トーラスを一般ファイバーとした写像なので, モノドロミーと周期写像で複素多様体としての性質が決まる. そこでラグランジアンファイブレーションがあったとして, モノドロミーの複雑さと周期写像の像がどのようになるか調べ, それから元の既約シンプレクティック多様体の位相的不変量にどのような制限が課されるかを見る.

（3）． **複素構造の変形の利用**:K3 曲面あるいは既約シンプレクティック多様体はその複素構造を変形することで, 極めて多様な形態を取りうる．実際 K3 曲面の具体的な記述方法としては射影空間の中の完全交叉を含め多数あるが, これらは全て微分幾何学的には同相であり, その上の複素構造だけが異なる. これを利用して, 成立すると期待される幾何的な主張を以下のようにして証明する.

① 証明したい性質が成立する特殊な既約シンプレクティック多様体を少なくとも一つ構成する.

② 証明したい性質が複素構造の変形で保たれることを示す.

③ （ア），（イ）を確立すれば，最初に構成した例と複素構造の変形で繋がる全ての既約シンプレクティック多様体で証明したい性質が成立する.

４．研究成果

方針 1．3 で得られた成果は大きく三つにまとめられる. 方針 2.では残念ながら望ましい結果は得られなかった.

（1）． 射影空間を像とするラグランジアンファイブレーションを持つ既約シンプレクティック多様体が存在すれば, 適当に複素構造を変形することで, 既約シンプレクティック多様体から射影空間の直積への有限射を構成することが出来ることを示した．このことから予想（＊）が正しければ, 既約シンプレクティック多様体で第二ベッチ数が 7 より大きいもの(知られているものは全てこの条件を満たしている)は複素構造を変形すれば射影空間の直積という簡単な空間の有限被覆として得られることが

わかる. 今後は分岐の指数や分岐点がどのようになっているかを調べて行きたい.

(2). K3 曲面の上の豊富な因子の線型系に対しては, 特別な曲線をその K3 曲面が含まない限り, 常に写像を定めることが知られている. また豊富な因子の二倍が定める線型系はやはり K3 曲面が特殊な曲線を含まなければ射影空間への埋め込みを与えることが知られている. これを方針 3. の視点からみると, 複素構造の変形の空間の特殊な点を覗いては, 対応する K3 曲面の豊富な因子の線型系は写像を定め, また二倍の因子が定める線型系は射影空間への埋め込みを与えると言い換えることが出来る. そこで既約シンプレクティック多様体にも同様な主張が成立するかを調べたところ, 既約シンプレクティック多様体に対しては, 豊富な因子が定める線型系が写像を定める複素構造及び射影空間への埋め込みを定める複素構造は両者ともに複素構造の変形空間の開集合をなすこと示すことが出来た. 残念ながら, 一般の既約シンプレクティック多様体に対して, このような開集合が空集合ではないことを示すことは出来なかったが, K3 曲面の層のモジュライ空間として得られる既約シンプレクティック多様体のある数値的な条件を満たす豊富な因子については空集合ではないことを示せた. これ以外の具体例についての検証及び補集合が複素構造の変形の空間でどのように特徴付けられるかは今後の課題である.

(3). K3 曲面の最も顕著な性質の一つに, 大域トレリ型定理がある. これは二つの K3 曲面 X と X' の二次のコホモロジー群の間にある条件を満たす線型写像が存在すれば, X と X' の間に同型が存在することを主張するものである. 一般に多様体の間の同型写像を構成することは, 大変難しいが, ベクトル空間であるコホモロジー群の間の線型写像の構成は比較的容易である. 実際, この定理を用いて, K3 曲面の自己同型群に関して非常に沢山の研究がなされている. 2009 年に大域トレリ型定理は既約シンプレクティック多様体にも拡張され, 類似の主張が成立することが示されていたのだが, Nef 錐と呼ばれるコホモロジー群の中に定義される錐の形に関する情報が不足しており, K3 曲面の手法を利用することが出来なかった. そこで, Nef 錐に関する構造を調べたところ, Nef 錐は MBM 類と呼ばれる第二コホモロジー群の元の部分集合が生成する錐の Beauville-Bogomolov 二次形式に関する双対錐として特徴づけられることがわかった. 応用として, 自己交点数が零の Nef という性質を持つ第二コホモロジー群の元を持つ既約シンプレクティック多様体はその元を保つ自己同型からなる部分群に無限巡回群を含むこと, またその階数を与える公式を示した. これは Shioda-Tate formula と呼ばれる公式の拡張ともなっている. また Beauville-Bogomolov 二次形式に関して自己交点数が零の第二コホモロジー群の元を持つ既約シンプレクティック多様体に対して, その複素構造を変形することにより, 第二ベッチ数から 2 を引いた階数の無限巡回群を自己同型群に含む既約シンプレクティック多様体を得られることも示した. この結果で得られた大きな自己同型群の部分群による商多様体を上手く定義することが出来れば, 商写像がすなわちラグランジアンファイブレーションを与えるのではないか, という観察があり, これからの検証がまたれる.

5．主な発表論文等

（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計 3 件）

(1). <u>Daisuke MATSUSHITA</u>, On isotropic divisors on irreducible symplectic manifolds , Advanced Study in Pure Mathematics , 査読有り, 74, 2017年, 291–312

(2). <u>Daisuke MATSUSHITA</u>, On deformations of Lagrangian fibrations , Birkhauser Progress in Math volume 'K3 Surfaces and their Moduli' , 査読有り, 315, 2016年, 237-243

(3). <u>Daisuke MATSUSHITA</u>, On base manifolds of Lagrangian fibrations , Science China Mathematics , 査読有り, 58, 2015年, 531-542

〔学会発表〕（計 10 件）

(1). <u>松下大介</u>, On the structure of the nef cone of a projective irreducible symplectic manifold, 第4回杜の都代数幾何学研究集会, 2018年

(2)． Daisuke MATSUSHITA, On the structure of nef cones of irreducible symplectic manifolds — an approach to Abundance conjecture —, 京都大学代数幾何学セミナー, 2018年

(3)． Daisuke MATSUSHITA, On the structure of the effective cone of irreducible symplectic manifolds, Japanese-European Symposium on Symplectic Varieties and Moduli Spaces, 2017年

(4)． 松下大介, On effectieve cone of irreducible symplectic manifolds, 野田代数幾何学シンポジウム 2017, 2017年

(5)． Daisuke MATSUSHITA, On K3 surface, 数理解析と応用・代数幾何と位相(第19回ソウル大ジョイントシンポジウム), 2016年

(6)． Daisuke MATSUSHITA, On freeness of divisors on irreducible symplectic manifolds, On explicit description of holomorphic symplectic manifolds, 2016年

(7)． Daisuke MATSUSHITA, On variations of Lagrangian fibration, 高次元代数幾何とその周辺, 2016年

(8)． Daisuke MATSUSHITA, On Mumford-Tate group of Lagrangian fibrations, Hokkaido University-KAIST(ASARC) Joint Workshop Algebra and Geometry, 2016年

(9)． Daisuke MATSUSHITA, On certain finite map from an irreducible symplectic manifold, Japanese-European Symposium on Symplectic Varieties and Moduli Spaces, 2015年

(10)． 松下大介, On relative albanese map , 京都大学代数幾何セミナー , 2014年

〔図書〕（計　0 件）

〔産業財産権〕

○出願状況（計　0 件）

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
出願年月日：
国内外の別：

○取得状況（計　0 件）

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
取得年月日：
国内外の別：

〔その他〕
ホームページ等
http://jes.riess-web.com/2017/

6．研究組織
(1)研究代表者
松下 大介（MATSUSHITA Daisuke）
北海道大学・理学研究院・准教授
研究者番号：90333591

(2)研究分担者
（　　）

研究者番号：

(3)連携研究者
（　　）

研究者番号：

(4)研究協力者
（　　）