

平成 29 年 6 月 10 日現在

機関番号：11301

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2014～2016

課題番号：26400033

研究課題名(和文)量子差分モノドロミー保存系,量子タイヒミュラー理論,可解格子模型の類似の追求

研究課題名(英文) Pursuit of analogies between quantum difference isomonodromic systems, quantum Teichmüller theory, and solvable lattice models

研究代表者

長谷川 浩司 (Hasegawa, Koji)

東北大学・理学研究科・准教授

研究者番号：30208483

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,600,000円

研究成果の概要(和文)：量子タイヒミュラー理論、量子差分モノドロミー保存系と可解格子模型の類似を追求することが目標であった。量子差分ガルニエ系の対称性や関数の量子化を幾何および格子模型の観点から研究すること、量子差分モノドロミー保存系における合流操作の量子化を可解格子模型のfusionを参考に定式化すること、量子タイヒミュラー理論としての理解を追求しつつ量子群から構成される可解格子模型にリーマン面の幾何の視点を導入すること、量子差分モノドロミー保存系のヤン・バクスター方程式の楕円関数解に対応する拡張を考えること、などを視野に入れている。これらについて基本的と考えられるラックス表示の幾何的理解に努め部分的成果を得た。

研究成果の概要(英文)：This project is to pursuit the analogies between the quantum isomonodromic systems, quantum Teichmüller theory, and the solvable statistical lattice models in two dimension. It involves many structures and aspects such as symmetries in quantum discrete Garnier systems and quantized tau function, as well as quantization of the so-called confluent procedure from the viewpoint of lattice models, and the quantized Teichmüller theory as the geometric counterpart of the solvable lattice theory. For all of these theme the proper understanding for the quantum discrete Lax matrix is important. We have explored some of the relevant structures e.g. the appropriate root ordering problem in the formula of universal R matrix to obtain the appropriate Lax matrices. Still there are remaining problems, one of the main issue is to understand the infinitely many poles arising from the imaginary root factors in a proper way.

研究分野：数学

キーワード：量子群 パンルヴェ方程式 可積分系

1. 研究開始当初の背景

本課題は、「モノドロミー保存変形問題の量子離散化」「量子タイヒミュラー理論」「可解格子模型」の三者が三位一体であり、互いに互いを理解する助けを与えうるという観点による研究である。系の量子化(非可換性)と差分化(時空離散化)を共に行うのが量子差分化(量子離散化)である。研究開始当初、本研究代表者は量子群の背景をもつ可積分系の研究において次の観察を行っていた: 「Faddeev-Volkov の量子差分サインゴールドン系を、非自励拡張し 4 周期簡約すると、パウルヴェ VI 型方程式の量子差分化(神保坂井系の量子化)が得られる。」本研究はこの観察に基くものである。

2. 研究の目的

パウルヴェ VI 型方程式は、 $0,1,t$ に確定特異点をもつ 2 階フックス型方程式のモノドロミー保存条件であり 4 点付リーマン球面のタイヒミュラー空間に住んでいる。差分 VI 型も同様である。上記観察では、可解格子模型の構成の類似として量子差分パウルヴェ系を得たが、これらを量子差分タイヒミュラー理論というべき幾何的対象と関係づけるべきという示唆であると考え、このことをなるべくあるべき姿に実現することが研究の目的であった。

3. 研究の方法

(1) Faddeev らの量子差分サインゴールドン系に対し、非自励化の周期簡約として量子差分ガルニエ系を構成し、多時間発展や対称性、関数等を量子離散タイヒミュラー空間の観点から調べる。

(2) (1) の $sl(n)$ 版として量子差分ガルニエ系の高ランク化を構成し、山田や菊地哲也による一般 Drinfeld-Sokolov 階層の簡約として得られる差分系と比較する。また、合流の操作の量子差分版を考察する。系の離散対称性と関数の非可換性、その意味を明らかにする。

(3) クラスタ代数へのワイル群作用や可解格子模型におけるベテ仮説法との関連を調べる。

(4) 理論の最汎化としての楕円関数化とその周辺、とくに楕円量子群・楕円パウルヴェ方程式について、申請者が以前に(再)構成した楕円マクドナルド作用素に関連し理解を深める。

4. 研究成果

・まずすでに得ていた結果(2013 年 9 月口頭発表、日本数学会、於愛媛大学)の再検討として、量子差分モノドロミー保存変形の高階版の構成を、改めて普遍 R 行列におけるル

ートの順序構造の取り方の観点から見直した。量子差分ラックス行列としてアフィン量子群の上三角部分と下三角部分に対応するふたつのラックス行列を考えることが自然であるが、それらを同一のルート順序構造から導いているかは明らかでなかった。これはちょうど逆の順序を入れて考えて上手く計算で来ていることが確認できた。

また関連して、Konstevich らによる量子 dilog 関係式の無限積が現れる場合について、アフィン量子群の普遍 R 行列の公式の異なるルート順序の取り方に対応する恒等式ではないかという予想があったが、これも簡単な場合に確認することが出来た。これらは残念ながら結果として発表に至らなかったが、主要な部分は寺崎敏志による修士論文「量子群の普遍 R 行列の積公式について」(東北大学、2015)としてまとめられた。ルートの順序構造の取り方の理解は、幾何的構造との対応を考える上で、今後重要であると考えている。特に、虚ルートに対応する普遍 R 行列の因子から生ずる無限個の極について、連続極限では方程式の線形問題が定義されている空間の被覆を定めるブランチカットの情報となるべきであるが、これを未だ自然に捉えきけることは残念ながら期間内には達成出来なかった。

・楕円的な場合の予備的考察として、Kuznetsov - Sklyanin がかつて得ていた Ruijsenaars 作用素の場合のベッケルト変換のある種の公式について、普遍 R 行列的な理解がありうるかを考えた。これについては、モジュラードブル量子群として $1p$ が研究している対象と関係すると考えられるが、その場合の R 行列の存在は未だ明らかにされておらず、周辺の理解がさらに必要と思われた。

・この他、連携研究者の黒木は、量子化された非自励差分系の関数とその正則性について、幾何的観点から研究を行った。これはポアソン構造まで込めて、可解格子模型の状態空間とパンルヴェ型方程式の量子差分化の空間をいかに同一視すべきかという問題でもあるが、ソリトン系の佐藤グラスマン多様体に基く扱いやその簡約としてのパンルヴェ型方程式の扱いも含めた様々な観点について、いまだ整理が必要な状況と思われる。

また山田泰彦は、初期値空間の実現の意味での幾何学的観点から、連続的および離散的パンルヴェ方程式について研究した。その主要な目標は、2個の射影直線の積上の8個の点の配置に関する幾何学的構造を基礎とした、アフィン・ワイル群の双有理表現、パンルヴェ方程式、ラックス形式、および超幾何型特殊解の系統的な構成である。これについて過去10年以上にわたる研究の蓄積を整理し、その結果をまとめた論文を完成させた

5. 主な発表論文等
(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計5件)

Gen Kuroki, "Regularity of quantum tau functions generated by quantum birational Weyl group actions", Communications in mathematical physics, to appear (2017)(有査読)

Kajiwara, Kenji; Noumi, Masatoshi; Yamada, Yasuhiko
Geometric aspects of Painlevé equations. J. Phys. A 50 (2017), no. 7 (有査読)

Ormerod, Christopher Michael; Yamada, Yasuhiko
From polygons to ultradiscrete Painlevé equations. SIGMA Symmetry Integrability Geom. Methods Appl. 11 (2015), Paper 056, 36 pp. (有査読)

Yamada, Yasuhiko

A simple expression for discrete Painlevé equations. Novel development of nonlinear discrete integrable systems, 87–95, RIMS Kôkyûroku Bessatsu, B47, Res. Inst. Math. Sci. (RIMS), Kyoto, 2014. (有査読)

Nagoya, Hajime; Yamada, Yasuhiko
Symmetries of quantum Lax equations for the Painlevé equations. Ann. Henri Poincaré 15 (2014), no. 2, 313–344. (有査読)

[学会発表](計6件)

Y. Yamada,

"Isomonodromy equations and gauge theories", Workshop "Progress in Quantum Field Theory and String Theory II", 28/Mar./2017, Osaka City Univ.,

Y. Yamada,

" q -Garnier system and its autonomous limit", Workshop "Elliptic Hypergeometric Functions in Combinatorics, Integrable Systems and Physics", 24/Mar./2017, Osaka City Univ.,

Yasuhiko Yamada,

"A geometric formulation of the q -Garnier system", Workshop "Geometry, Analysis and Mathematical Physics", 16/Feb./2017, Kyoto university.,

Y. Yamada,

"On the q -Garnier system", Workshop on Integral Systems, 2/Dec./2016, University of Sydney,

山田泰彦,

"Quantum curves associated with quantum Painlevé equations", Curves, moduli and integrable systems, 津田塾大学, 2015-2-18

Yasuhiko Yamada,

"Geometry of Painlevé equations", Integrable Systems in Newcastle, Department of Mathematics and Information Sciences, Northumbria University, 2014年9月26日-9月27日, (国際)(招待)

〔図書〕(計 1 件)

Koji Hasegawa and Yasuhiko Yamada
(eds.),
“String theory, integrable systems and
representation theory”
京都大学数理解析研究所講究録別冊、B62
(2017), 200 pages, Kyoto university, to
appear.

〔産業財産権〕

出願状況(計 0 件)

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
出願年月日：
国内外の別：

取得状況(計 0 件)

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
取得年月日：
国内外の別：

〔その他〕

ホームページ等

6. 研究組織

(1) 研究代表者

長谷川 浩司 (Koji Hasegawa)
東北大学・大学院理学研究科・准教授
研究者番号：30208483

(2) 研究分担者

()

研究者番号：

(3) 連携研究者

山田 泰彦 (Yasuhiko Yamada)
神戸大学・大学院理学研究科・教授
研究者番号：00202383

黒木 玄 (Kuroki Gen)

東北大学・大学院理学研究科・助教
研究者番号：10234593

(4) 研究協力者

()