

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 30 年 5 月 8 日現在

機関番号：12501

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2014～2017

課題番号：26400037

研究課題名(和文) クラスタ代数の差分方程式と三次元多様体への応用

研究課題名(英文) Application of cluster algebras to difference equations and 3-manifolds

研究代表者

山崎 玲(井上玲) (Yamazaki, Rei)

千葉大学・大学院理学研究院・准教授

研究者番号：30431901

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,800,000円

研究成果の概要(和文)：クラスタ代数を応用して結び目の不変量および可積分な差分方程式の研究を行った。点付き円盤に付随したクラスタ代数を用いて組みひも群を実現し、量子クラスタ代数を経由した KashaevのR行列との関係を解明した。周期が1の交換行列から定まる差分方程式のシンプレクティック構造を系統的に調べた。トーラス上のネットワークモデルを用いて離散戸田格子方程式のある一般化を構成し、組み合わせ的手法と代数幾何の手法を合わせてその初期値問題を解いた。円筒状のある籐の上の対称群作用を構成し、クラスタ代数の視点からA型の幾何R行列を研究した。

研究成果の概要(英文)：We have studied knot invariants and integrable difference equations by applying cluster algebras. We realized the braid group using cluster mutations on a punctured disk, and clarified the relation with Kashaev's R-matrix via quantum cluster algebra. We studied the symplectic structure for the difference equations associated with exchange matrices of period one. We introduced a generalization of the discrete Toda lattice equation by using the network model on a torus, and solved its initial value problem using algebraic geometry and combinatorics. Further, we constructed the symmetric group action on a quiver on a cylinder, and studied the geometric R-matrix of A-type from the view point of cluster algebra.

研究分野：数理物理学

キーワード：数理物理学 クラスタ代数 可積分系 結び目不変量 幾何クリスタル

1. 研究開始当初の背景

クラスター代数とは、Fomin と Zelevinsky によって 2000 年頃に定式化された可換環の一種である。代数を生成する mutation と呼ばれる操作が様々な数学の概念と対応しており、表現論、点付き曲面、ポアソン多様体、差分方程式など様々な分野での応用が活発に研究されてきた。

Fock と Goncharov によるクラスター代数の量子化、そしてクラスター集合体を用いた点付きリーマン面のモジュライ空間の研究も重要である。モジュライ空間への群作用とクラスター集合体への mutation 作用との関係は Donaldson-Thomas 理論の観点からも研究されている。クラスター代数のポアソン構造、シンプレクティック構造は Gekhtman、Shapiro、Vainshtein によって導入され、差分方程式の研究にも応用されている。

本研究で重要となるのは、mutation の「幾何的解釈」と「周期性」という考え方である。

まず幾何的には、点付き曲面に対し、その三角形分割に対応するクラスター代数の種 (seed) が定まるという事実がある。クラスター代数以前に Penner が導入した点付きリーマン面の双曲構造を定める座標は非負実数値をとるクラスター変数に対応し、mutation は理想三角形分割の取り換え (フリップ) に対応する。この座標を複素化することによって三次元双曲多様体を扱えるようになる。我々はこれまでの研究で、この方法によって二橋結び目補空間の複素体積を計算することに成功している。

一方、周期性については、mutation 列に対する「交換行列の周期性」と「種の周期性」という二つの概念がある。差分方程式の研究では、前者を用いて定義される有理写像 (T システム、Y システムと呼ばれる) が出発点となり、有理写像の可換性やダイログ関数の恒等式などを証明するのに後者が使われる。点付き曲面の研究では、前者は対応するクラスターモジュラー群を定義するのに使われ、後者は組み紐関係式など群の生成関係式を証明するのに応用される。これらの研究で重要となる性質「クラスター代数の種の周期性、量子クラスター代数の種の周期性、トロピカル変数の種の周期性の三つは同値」は、クラスター圏の深い理論にも関係する性質である。

2. 研究の目的

本研究の目的は大きく分けて 2 つあり、(a) クラスター代数に関連する上記のような道具を用いて可積分な差分方程式や区別線形方程式を構成し、それらを解析して新しい対称性を発見すること、そして (b) 三次元多様体の不変量、点付きリーマン面といった幾何的対象にクラスター代数の新しい応用を見つけることである。量子クラスター代数

によって差分方程式やモデルの自然な非可換化が得られる可能性があり、これについても積極的に研究を進めようと考えている。

将来的には、差分方程式の可積分構造を手掛かりにして、代数幾何や表現論とクラスター代数との新しい関係を見出したい。

3. 研究の方法

まず、これまでの研究の発展として、量子クラスター代数を用いて結び目不変量の研究を進めた。差分方程式の研究では、クラスター代数で使われる籠 (quiver) と双対なダイマー模型や、クラスター代数の出自とも関連のあるネットワークといった組み合わせ的な道具を新しく用いた。差分方程式の区別線形極限 (トロピカル化) を解析するために、トロピカル幾何の手法も用いた。研究を効率的に進めるため、表現論や幾何の関連近接分野の専門家と議論を行った。研究費の多くは旅費に充て、特に共同研究の推進と情報収集のための海外渡航に使用した。

本課題の期間中、以下にまとめたように 1 週間程度の短期間海外の研究機関に滞在して集中的に議論し、その後メールと Skype で議論を継続することによって共同研究を進めた。クラスター代数の関連分野は国内より国外で盛んであり、積極的に外へ出て情報を集める必要があった。その成果は十分にあり、現在進行中のものを含む幾つかの共同研究に結びついた。

- (1) MFO (Oberwolfach, ドイツ): 2015 年 4 月、プログラム「Tropical aspects in geometry, topology and physics」に参加。
- (2) Minnesota 大学 (Minnesota, アメリカ): 2016 年 1 月、Pavlo Pylyavskyy 准教授のもとに滞在し、Michigan 大学の Thomas Lam 教授とともにクラスター代数とネットワークに関する共同研究を行った。また 2017 年 8 月にも同准教授のもとに滞在し、アフィン対称群の簡約元に付随するセルオートマトンに関する共同研究を行った。
- (3) CIRM (Luminy, フランス): 2018 年 3 月、プログラム「Cluster Algebras: Twnty years on」に参加。

4. 研究成果

- (1) 周期 1 の quiver に付随した T システムと Y システム
T システムの解から Y システムの解が得られることが知られているが、一般には Y システムの全ての解は得られない。この問題を周期 1 の quiver に付随したクラスター代数の場合に考察し、T システムを非自律的に変形することによって Y システムの一般解を記述する自由度が確保できることを証明した。交換行列が定め

るポアソン構造のシンプレクティック部分の基底に「回文的な」取り方があること、そしてある場合にこの基底を用いるとパウルベ性をもつ差分方程式が得られることを示した。この研究は A. Hone 氏と共同で行い、雑誌論文(6)にまとめた。

(2) 量子クラスター代数による R 作用素の実現と結び目の複素体積

量子クラスター代数を用いて組み紐群を実現する R 作用素を構成し、この群の量子 Y 変数への作用が量子ダイログ関数の随伴作用で表せることを発見した。さらに、量子化の変形パラメーターが 1 の冪根になる極限において、この R 作用素は Kashaev の R 行列とゲージ同値であることを証明した。結び目の体積予想はもともと Kashaev の R 行列によって定式化されており、この結果はこの予想にクラスター代数という新しい視点を加えたことになる。この研究は樋上和弘氏と共同で行い、雑誌論文(5)にまとめた。

(3) ネットワークとクラスター代数による A 型の幾何 R 行列の研究

トーラス上のネットワークに作用するアフィンワイル群を用いて、時間離散戸田格子方程式の 3 パラメータ (n, m, k) の一般化を構成した。 $(n, 2, n-1)$ の場合は広田氏らによって導入された周期的時間離散戸田方程式、そして $(n, m, 0)$ の場合は梶原氏らによって導入された A 型の幾何 R 行列に付随する有理写像に相当する。このモデルについて次の結果を得た。(a) n と k の最大公約数を N とする。アフィンワイル群の可換部分群の作用を用いて $(m+N)$ 個の可換な有理写像を定義する。これらは可換な離散時間発展則を与えるが、Lax 行列の固有多項式から定まるスペクトル曲線を保存する。(b) それらの時間発展がスペクトル曲線のヤコビ多様体上で線形化され、リーマンのテータ関数を使って初期値問題が解ける。円筒上の三角格子の辺に向きをつけた quiver に作用する mutation の列としてクラスター R 行列を導入し、これについて次の結果を得た。(a) クラスター R 行列は Yang-Baxter 関係式を満たす。(b) クラスター R 行列のクラスター変数 (x, y) への作用は、A 型アフィン量子群の対称テンソル表現に付随する幾何クリスタル(変数 q) に作用する幾何 R 行列と整合的である。特に y 変数は二つの q 変数の比になっている。quiver に「凍った」頂点を加えると、 x 変数は変数 q のタウ関数の役割をもつ。(c) 量子クラスター代数を用いると

クラスター R 行列の自然な非可換化が実現できる。これと整合的な量子幾何 R 行列が、変数 q に非局所的な非可換性を入れることにより実現できる。(d) 変数 q のループ対称関数(ループ基本対称多項式、ループ Schur 多項式)の非可換化で、量子幾何 R 行列の作用で不変なものが定義できる。

この研究は T. Lam 氏、P. Pylyavskyy 氏と共同で行い、結果を雑誌論文(1)、(2)にまとめた。

(4) アフィン対称群の簡約元に付随するセルオートマトン

Pylyavskyy と Glick が構成した無限の長さをもつアフィン対称群の簡約元から有理写像を作る方法を応用して、セルオートマトンのある族を構成し、その解と対称性について次の結果を得た。(a) 元の有理写像のソリトン解のトロピカル極限では得られないソリトン解が存在する。それらを組合せ的に構成した。(b) ソリトン解は、適当な対応によって A 型の箱玉系の解の一部と双対的(時間と空間座標と入れ替える対称性)な関係にある。(c) ソリトン解以外に、ソリトン解への緩和、パルサー解が存在する。

この研究は P. Pylyavskyy 氏、M. Glick 氏と共同で行い、得られた結果を論文にまとめた。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計 6 件)

- (1) Rei Inoue, Thomas Lam and Pavlo Pylyavskyy, On the cluster nature and quantization of geometric R-matrices, Publ. Res. Inst. Math. Sci., to appear 査読有.
- (2) Rei Inoue, Thomas Lam and Pavlo Pylyavskyy, Toric networks, geometric R-matrices and generalized discrete Toda lattices, Comm. Math. Phys., 347, pp 799 - 855 (2016) 査読有, DOI: 10.1007/s00220-016-2739-z.
- (3) Kazuhiro Hikami and Rei Inoue, Braids, Complex Volume, and Cluster Algebra, Algebraic and Geometric Topology, 15, 2175 - 2194 (2015) 査読有, DOI: 10.2140/agt.2015.15.2175.
- (4) Rei Inoue, Pol Vanhaecke and Takao Yamazaki, Algebraic integrable systems related to spectral curves with automorphisms, J. Geom. Phys., 87, 198-216 (2015) 査読有, DOI: 10.1016/j.geomphys.2014.07.008.

- (5) Kazuhiro Hikami and Rei Inoue, Braiding Operator via Quantum Cluster Algebra, J. Phys. A: Math. Theor., 47, 474006 [21 pages] (2014) 査読有, DOI: 10.1088/1751-8113/47/47/474006.
- (6) Andrew N. W. Hone and Rei Inoue, Discrete Painleve equations from Y-systems, J. Phys. A: Math. Theor., 47, 474007 [26 pages] (2014) 査読有, DOI: 10.1088/1751-8113/47/47/47400

〔学会発表〕(計 18 件)

- (1) Rei Inoue, R-matrices in cluster algebra, Cluster Algebras: Twenty Years On (CIRM, France) 2018 年 3 月 22 日.
- (2) Rei Inoue, Cellular automata for reduced words in the affine symmetric group, Integrable Systems 2017 (The University of Sydney, Australia) 2017 年 12 月 7 日.
- (3) Rei Inoue, Networks on a cylinder and discrete integrable systems, New development in Teichmüller space theory (OIST, 沖縄) 2017 年 11 月 28 日.
- (4) 井上 玲, An application of cluster algebra to hyperbolic geometry I, II, リーマン面に関連する位相幾何学, 東京大学, 2017 年 9 月 3, 4 日.
- (5) 井上 玲, Cluster algebraic structure of geometric R-matrices, Algebraic Lie Theory and Representation Theory 2017, 帝人アカデミー富士, 2017 年 6 月 11 日.
- (6) Rei Inoue, Cluster braiding operator and Kashaev's R-matrix, Workshop on Volume Conjecture and Quantum Topology (早稲田大学) 2016 年 9 月 8 日.
- (7) Rei Inoue, The cluster structure of geometric R-matrices, 5th Workshop on Combinatorics of Moduli Spaces, Hurwitz Numbers, and Cohomological field theories (Laboratoire Poncelet, HSE and Steklov Mathematical Institute, Moscow) 2016 年 6 月 8 日.
- (8) Rei Inoue, Double affine symmetric group action on the toric network and generalized discrete Toda lattice, Topics on tropical geometry, integrable systems and positivity, 青山学院大学, 2015 年 12 月 23 日.
- (9) 井上 玲, Thomas Lam, Pavlo Pylyavskyy ; Toric network and generalized discrete Toda lattice, 日本数学会 2015 年度秋季総合分科会, 京都産業大学, 2015 年 9 月 14 日.
- (10) Rei Inoue, Cluster algebra and knot invariants, Braids,

- Configuration Spaces, and Quantum Topology (東京大学) 2015 年 9 月 8 日.
- (11) 井上 玲, 変換行列の退化と Y システム, RIMS 研究集会「可積分系理論の諸分野への応用」(代表者: 筧三郎), 京都大学, 2015 年 8 月 21 日.
- (12) Rei Inoue, Double affine symmetric group action on the toric network and generalized discrete Toda lattice, Integrability in algebra, geometry and physics: New trends (Congresso Stefano Franscini, Switzerland) 2015 年 7 月 16 日.
- (13) Rei Inoue, Double affine symmetric group action on the toric network, and integrable cellular automata, Tropical aspects in geometry, topology and physics (MFO, Oberwolfach) 2015 年 4 月 27 日.
- (14) Rei Inoue, Generalization of discrete Toda lattice and toric network, The 9-th IMACS Conference on Nonlinear Evolution Equations and Wave Phenomena (Georgia) 2015 年 4 月 1 日.
- (15) Rei Inoue, Toric networks and generalizations of discrete Toda lattice Curves, Moduli and Integrable Systems (津田塾大学) 2015 年 2 月 18 日.
- (16) Rei Inoue, R-operator and knot invariants via cluster algebra, Quantum Topology and Physics 2014 in Fukuoka (Nishijin Plaza, Fukuoka), 2014 年 9 月 19 日.
- (17) Rei Inoue, R-operator and knot invariants via cluster algebra, Integrability and Cluster Algebras (ICERM, Providence), 2014 年 8 月 29 日.
- (18) Rei Inoue, R-operator and knot invariant via cluster algebra, Lie theory and mathematical physics (CRM, Montreal), 2014 年 5 月 19 日.

〔図書〕(計 1 件)

井上 玲, 団代数と Y システム, 団代数をめぐって, 数理科学, 2015 年 3 月号 No.621, 33-38 (サイエンス社).

〔産業財産権〕

出願状況 (計 0 件)

取得状況 (計 0 件)

〔その他〕

ホームページ:

<https://sites.google.com/site/reiinouesite/>

6. 研究組織

(1) 研究代表者

山崎 玲 (井上 玲) (Rei Yamazaki (Rei Inoue))

千葉大学大学院理学研究院・准教授

研究者番号：30431901

(2) 研究分担者

()

研究者番号：

(3) 連携研究者

()

研究者番号：

(4) 研究協力者

()