

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 29 年 6 月 22 日現在

機関番号：14601

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2014～2016

課題番号：26400044

研究課題名(和文)圏論的な枠組み・アプローチによる局所コホモロジー加群の性質に関する研究

研究課題名(英文)A research on properties on local cohomology modules from the approach of category theory.

研究代表者

川崎 謙一郎(Kawasaki, Ken-ichiroh)

奈良教育大学・教育学部・教授

研究者番号：60288040

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,600,000円

研究成果の概要(和文)：本研究助成による成果は、次の1つの定理を得、その詳細な証明を与えることができたことである：定理. A を可換ネーター環とし、有限 Krull 次元ゴレンスタイン環の準同型像とする. また、 J を A のイデアルとする. さらに A は J -進位相で完備であると仮定する. N^\bullet を A -加群からなる下に有界な複体とする.

もしイデアル J が1次元または単項であるならば A -加群からなる複体 N^\bullet について次の必要十分条件が成り立つ： N^\bullet が J -余有限複体であるための必要十分条件は N^\bullet のすべてのコホモロジー加群が $M(A, J)\text{cof}$ に属することである.

研究成果の概要(英文)：The chief researcher obtained the following assertion and its proof in detail during the period supported by the grant:

Theorem. Let A be a homomorphic image of a Gorenstein ring of finite Krull dimension, J an ideal of A of dimension one, and N^\bullet a bounded-below complex of A -modules. Suppose that A is complete with respect to a J -adic topology. During the period supported by the grant, we could give a proof that N^\bullet is a J -cofinite complex if and only if $H_i(N^\bullet)$ is a J -cofinite module for all i . The same result is also proved for principal ideals J . Consequently, for the fourth question given by R. Hartshorne, we obtain an answer over the ring, on affine curves and hypersurfaces.

研究分野：可換代数学

キーワード：代数学 可換代数学 局所コホモロジー加群 圏(アーベル圏,セール圏) 余有限加群 モノミアル ハイパー群 算数・数学教育

1. 研究開始当初の背景

次の結果が知られている.

定理 (Huneke-Sharp, Lyubeznik). R が体を含む正則局所環で I を R のイデアルとし, m を極大イデアルとする. このとき, すべての i, j に対して, 次が成り立つ.

- (1) 2重局所コホモロジー加群 $H^i_{I^2}(H^j_{I^2}(R))$ は移入的である.
- (2) 局所コホモロジー加群 $H^i_{I^2}(R)$ の移入的次元は $H^i_{I^2}(R)$ の台の次元を越えない.
- (3) 局所コホモロジー加群 $H^i_{I^2}(R)$ の付随素イデアルの集合は有限である.
- (4) 局所コホモロジー加群 $H^i_{I^2}(R)$ のすべての Bass 数は有限である.

1993 年に提出されたこの結果は, 長年, 局所コホモロジー加群の進展がなかったところに新しい進展の機会を研究者に提供した成果である. 以下, これらの結果から考えられる問題について整理して考える:

(i) 一定の条件下で, 余有限加群からなる圏 $M(R, I)\text{cof}$ はすべての局所コホモロジー加群を含む圏である. この圏 $M(R, I)\text{cof}$ と, 下に有界な余有限複体 $N \cdot$ との関連性についてはどのようなことがいえるか?

(ii) G. Faltings が Peskine-Szpiro, Ogus 結果を任意の標数で別証明を与えたように, これら Huneke-Sharp と Lyubeznik の結果を任意の標数で別証明を与えることはできないか? 特に, 上の Huneke-Sharp と Lyubeznik の結果を, いかに体を含まない状態で得られるか?

上記考察 (ii) については, Lyubeznik (米国) が, 代数的 D -加群の理論の analogy を, 体を含まない状態で構成することによって, 正則局所環上, 部分的に解決した. 局所コホモロジー加群を代数的 D -加群の圏論的な枠組みに置いて巧妙に証明した. 特に, R が不分岐正則局所環について, 上の諸問題をほぼ完全に解決した. 本研究期間において, 圏論的な枠組みやそこの挙動など圏論的なアプローチによって問題解決を図るとしていた. 一方で, 難しい課題であるので長期的な展望をもって考察する必要があると考えている.

上記の定理が提出された論文の中で, Lyubeznik は, 局所コホモロジー加群に代数的 D -加群の理論を応用したときに, 1 つの新しい不変量を提唱した. こんにち Lyubeznik number と呼ばれている. Lyubeznik number についてはいくつか進展がある. 特に, 体を含まない環の条件下で定義されることは最近分かってきている. もともとの定義自体は体を含む条件下にて与えられたものである. Lyubeznik number の位相的な特徴付けや, それらの応用についても本研究に関して研究の視野に入れていた.

上記考察 (i) について, ここ数年, 一連の論文が提出されている. 1次元のイデアルについて論文であり, 手法が elementary であるが, 環の条件が局所環を仮定していない条件下で, 余有限加群からなる圏 $M(R, I)\text{cof}$ の性質に関する結果に進展があった. 下記の論文の結果は, 環の条件について局所環を仮定していない, 局所コホモロジー加群の性質を圏論的に捉えるための非常に重要な結果である:

L. Melkersson, Cofiniteness with respect to ideals of dimension one, Journal of Algebra, 372, (2012), 459--462.

さらに, 次の 2 つの論文を紹介する.

R. Abazari and K. Bahmanpour, Cofiniteness of extension functors of cofinite modules, Journal of Algebra, 330 (2011), 507-516.

K. Bahmanpour and R. Naghipour, Cofiniteness of local cohomology modules for ideals of small dimension, Journal of Algebra, 321 (2009), 1997-2011.

また, 本申請者が連携研究者と共同で, 完備ゴレンシュタイン環局所環上で関連結果を過去に得ている. 特に, 上記 L. Melkersson の結果は重要な結果と考えている. これらの一連の結果とその成果については, 大いに発展の可能性がある. 申請時点ではその方向性は未知であり, 今後の本申請研究の対象として大きな位置づけをしていた.

局所コホモロジー加群は, 他のいくつかの分野で発展してきたコホモロジー理論と関係が深い. ホモロジーおよびコホモロジーはアーベル圏による複体の圏からアーベル群への関手と捉えることができる. 例えば, エタールコホモロジーは Lyubeznik number と非常に関係が深い:

Blickle: Lyubeznik's invariants for cohomologically isolated singularities. Journal of Algebra, 308 (2007) 118-123.

また, 局所コホモロジー加群は代数的 D -加群の構造を持つ. D -加群はリー群, リー環/代数群の理論と関係が深い. それらの理論が局所コホモロジー加群にいかに応用されるか非常に興味深いところである. これらを圏論的な視点で眺めうるかどうか, そのようなアプローチの仕方は存在するかどうか考察することは非常に興味深い.

以上述べように 1993 年に局所コホモロジー加群の肯定的な結果が得られてから, 今まで考えてこられていなかった多くの分野や, 手法が局所コホモロジー加群の問題解決に導入された. 代数的 D -加群, フロベニウス射, Hasse-Schmidt の高階導分, エタールコホモロジーなど, 可換代数学の各分野の中でも, 多岐にわたる分野・領域が交錯する研究対象である. 1960 年代から 1993 年までの長い期間, ほとんど何も進展しなかった実情を踏まえると, 本研究で成果が得られた場合, 国際的にも評価が高いとい

える。

2. 研究の目的

本研究の目的は、次の通りとしていた。

目的. 局所コホモロジー加群やそれに関連する加群の性質や構造について明らかにすること。

特に、本申請では圏論的な枠組みや圏論的なアプローチ・方法により局所コホモロジー加群や関連加群の性質について明らかにしていくことを目的とする。上記目的についてより具体的に、次の3点をあげる。

目的 2. 環 R が不分岐正則局所環である場合に特化して、過去の結果の精密化をはかること。

目的 3. 局所コホモロジー加群の Bass 数の有限性に関するの問題を、 R が分岐正則局所環上で解決すること。

研究開始当初の背景で述べたところの問題 (i) に関して、本研究期間において、次の目的も含めて以前の研究結果を発展・精査・検討することになった。

目的 4. 局所コホモロジー加群に関連する導来圏と加群の圏との関連を明らかにする。

さらに、これらの応用として数学以外の領域への応用も目的としていた。本研究期間をとおして、結果として、目的 4 を主に遂行することになった。

3. 研究の方法

平成 26 年度 (2014 年) から平成 28 年度 (2016 年) までの 3 年間の研究の方法は以下の通りとした。

本助成金を平成 26 年度 (2014 年) は、本研究機関の国内旅費と備品や物品に関して重点的に使用し、平成 27 年度/平成 28 年度 (2015 年 /2016 年) は、国内外の旅費に関して重点的に当てる。

平成 26 年度は、本科学研究費申請期間 (3 年間) の初年度であったので、本研究機関の設備・備品について整備をした。

研究成果を公表することや、他の分野の研究成果について情報を得る活動は、本研究になくはない。本科学研究費申請期間 (3 年間) の旅費に関しては、毎年定期的に行われているいくつかの研究集会に参加をした。そこで、当時最新の研究の進展についてのその情報交換をはかった。

1. 日本数学会 (毎年 9 月, 3 月)
2. 可換環論シンポジウム (毎年 11 月, 12 月)
3. 可換環論セミナー (毎年 1 月)
4. 米沢数学セミナー (毎年 7 月)

他、関連研究者との研究打ち合わせを行い命題の証明の正確なホローを行った。最終

年度の平成 26 年度は、下記の国際研究集会の主催者代表となり、国際的な研究者と交流をし、彼らからいくつか有益な情報を得た。他、次の通り研究会を開き、本研究代表者がその世話役を行った。それらをまとめ、以下に列挙する。

研究集会 ``Workshop on Harmonic Analysis in Nara 2017 ~ Representation Theory, Operator Algebras and Hypergroups ~'',

開催日程: 2017 年 3 月 28 日 (火) から 3 月 30 日 (木) まで、開催地: 奈良女子大学 (Nara Women's University), 開催場所: 奈良女子大学 住所: 630-8506 奈良市北魚屋西町 Tel: 0742-20-3815 Fax: 0742-20-3815, 開催場所 (Location): Room B1406, in the fourth floor of New Building B, in Nara Women's University 奈良女子大学 新 B 棟 4 階 B1406 (数学階段教室). 主催者 (Organizers): *渚 勝 (千葉大学) 山中聡恵 (奈良女子大学), 釣井達也 (大阪府立大学), 川崎謙一郎 (奈良教育大学), 高橋亮 (奈良教育大学), *主催者代表.

研究集会 ``Workshop in Nara University of Education 2016 ~ The international meeting on Commutative algebra, Banach algebras (preserver problem), Hypergroups and their related topics ~'', 開催場所: 施設名: 奈良商工会議所 小ホール (4F, 11 月 4 日), 会議室 B (地下階, 11 月 5 日), E 会議室 (地下階, 11 月 6 日), 所在地: 〒 630-8586 奈良市登大路町 36-2, 施設電話: Tel: 0742-26-6222, Fax: 0742-22-1180, 施設 URL: <http://www.nara-cci.or.jp/>, 開催期間: 2016 年 11 月 4 日 (金) ~ 11 月 6 日 (日), 開催地: 奈良県奈良市, 主催者: Ken-ichiroh Kawasaki (Nara University of Education)*, Satoe Yamanaka (Nara Women's University), Tatsuya Tsurii (Osaka Prefecture University), Takeshi Miura (Niigata University), Osamu Hatori (Niigata University), *Chief Organizer. 最終年度の平成 28 年度に奈良開催の国際的な Workshop において成果発表を行った (下記 4 研究成果[学会発表] を参照)。

4. 研究成果

本科学研究費助成金による成果は、次の 1 つの定理を得、関連研究者との研究打ち合わせを行い、度重なる議論の結果、その詳細な証明を与えることができたことである。

定理. A を可換ネーター環とし、有限 Krull 次元ゴレンスタイン環の準同型像とする。また、 J を A のイデアルとする。

さらに A は J -進位相で完備であると仮定する. $N\cdot$ を A -加群からなる複体の $D+(A)$ における対象とする. ただし, $D+(A)$ は下に有界な導来圏とする. もしイデアル J が 1 次元または冪根を度外視して単項であるならば A -加群からなる複体 $N\cdot$ について次の必要十分条件が成り立つ:

‘ $N\cdot$ が J -余有限複体であるための必要十分条件は $N\cdot$ のすべてのコホモロジー加群が $M(A, J)\text{cof}$ に属する ’ ことである.

ここで次の問題を思いだそう:

問題 (第四問題) 次の特徴付けをみたく R -加群のアーベル圏 Mcof は存在するか?

$N\cdot$ が $D(R, J)\text{cof}$ に属する必要十分条件は ‘ 全ての i に対して $H_i(N\cdot)$ が Mcof に属すること ’ である.

本科学研究費助成期間において, 上記の問題に関し, 正則でない可換ネーター環で, 双対複体をもつという条件の下で, イデアル J が 1 次元イデアルまたは単項イデアルであるとき, 上記定理における主張にみられるような, 余有限複体の特徴付けを与えることに成功した. イデアル J が 2 次元または 2 元生成の状況では反例が知られている.

本結果により R. Hartshorne (1969/70 に出版されている) が与えた上記第四問題について, 可換ネーター環における 1 次元のイデアルおよび単項イデアルに対して 1 つの解答を与えたことになる. 本定理は, かなり前から概ねの結果自体は得ていたが, 成果物としてその結果を公表するために, 投稿してからおよそ 2 年という長い査読期間を余儀なくされた. かなりデリケートな議論を行わなければならない, 実際のところ, 本研究期間では得られた結果やその補助定理の証明を取捨選択, 精密に修正, およびそれらの証明を厳密にホローするために使われた期間となった.

5. 主な発表論文等

(研究代表者, 研究分担者及び連携研究者には下線)

主な論文や報告書を以下に記述する.

[雑誌論文](計 3 件)

論文タイトル: On the characterizations of cofinite complexes over affine curves and hypersurfaces, Ken-ichiroh Kawasaki 単著, Journal of Algebra, Volume 479, 1, June 2017, Pages 314-325

論文タイトル: Hypergroups related to a pair of compact hypergroups, Herbert Heyer, Satoshi Kawakami, Tatsuya Tsurii, Satoe Yamanaka, SIGMA. Symmetry, Integrability and Geometry. Methods and Applications. 12 (2016), 111, 17pages

科学研究費助成報告書: 「圏論的枠組み・圏論的アプローチによる局所コホモロジー加群の性質に関する研究」川崎 謙一郎 (課題番号 26400044) 平成 26 年度 ~ 28 年度科学研究費補助金 (基盤研究 (C)) 研究成果報告書 平成 29 年 3 月, 研究組織: [研究代表者: 川崎 謙一郎 (奈良教育大学), 連携研究者: 衛藤 和文 (日本工業大学), 研究協力者: 釣井達也 (大阪府立大学)]

[学会発表](計 8 件)

講演題目: ‘A variant of Hartshorne’s result on a characterization of cofinite complexes’, 研究集会: Workshop on Harmonic Analysis in Nara 2017 ~ Representation Theory, Operator Algebras and Hypergroups ~,

講演者予定者: 川崎 謙一郎 (奈良教育大学),

開催日程: 2017 年 3 月 28 日 (火) ~ 3 月 30 日 (木), 開催場所: 奈良女子大学, 所在地: 奈良女子大学 新 B 棟 4 階 B1406 (数学階段教室), 施設 URL: <http://www.nara-cci.or.jp/>, 発表日時: 平成 28 年 11 月 6 日 (日) (2016 年) 午後 3 時 20 分 ~ 午後 3 時 50 分,

開催地: 奈良県奈良市 (本講演は, 予定をしていたが事情により講演を取り下げることになった. プログラムには記載されているので本稿に記載する).

講演題目: ‘A partial survey on the finiteness properties of local cohomology modules over affine curves and hypersurfaces’, 研究集会: Workshop in Nara University of Education 2016 ~ The international meeting on Commutative algebra, Banach algebras (preserver problem), Hypergroups and their related topics ~,

講演者: 川崎 謙一郎 (奈良教育大学) 単独講演, 開催日程: 2016 年 11 月 4 日 (金) ~ 11 月 6 日 (日), 開催場所: 施設名: 奈良商工会議所 小ホール (4F, 11 月 4 日), 会議室 B (地下階, 11 月 5 日), E 会議室 (地下階, 11 月 6 日) 所在地: 〒630-8586 奈良市登大路町 36-2, 発表日時: 平成 28 年 11 月 6 日 (日) (2016 年) 午後 3 時 20 分 ~ 午後 3 時 50 分, 開催地: 奈良県奈良市.

講演題目: ‘双対複体に関する性質の直接的な証明 ~ ’

講演者: 川崎 謙一郎 (奈良教育大学) 単独講演, 第 90 回米沢数学セミナー『可換 Banach 環と関連分野研究集会』, 発表日時: 平成 28 年 7 月 3 日 (土) 11 時 00 分 ~ 11 時 25 分, 開催日程: 平成 28 年 7 月 2 日 (土) ~ 3 日 (日),

場所：山形大学工学部 百周年記念会館セミナールーム，
開催地：山形県米沢市。

講演題目：`導来圏に関する Hartshorne の定理の改良 ~ 有界でない余有限複体の特徴付けに向けて ~`
講演者：川崎謙一郎 (奈良教育大学) 単独講演，第 3 回新潟セミナー，発表日時：平成 27 年 12 月 20 日(日) 17 時 10 分~17 時 50 分，開催日程：平成 27 年 12 月 20 日(日) 14 時 00 分 ~ 17 時 50 分，場所：新潟大学駅南キャンパス「ときめいと」講義室 A
主催者：新潟大学理学部 羽鳥理，〒950-2181 新潟市五十嵐 2 の町 8050 新潟大学理学部，TEL 025-262-6127，
開催地：新潟県新潟市。

講演題目：`双対複体に関する性質の直接的な証明`，講演者：川崎謙一郎 (奈良教育大学)，第 90 回米沢数学セミナー『可換 Banach 環と関連分野研究集会』，発表日時：平成 28 年 7 月 2 日(土) 11 時 00 分~11 時 25 分
開催日程：平成 28 年 7 月 2 日(土)~3 日(日)，場所：山形大学工学部 (百周年記念会館セミナー室)，
開催地：山形県米沢市。

講演題目：`単項イデアルに関する余有限複体の特徴付けについて`，講演者：川崎謙一郎 (奈良教育大学)，第 88 回米沢数学セミナー『可換 Banach 環と関連分野研究集会』，発表日時：平成 27 年 6 月 27 日(土) 14 時 30 分~15 時 00 分
開催日程：平成 27 年 6 月 27 日(土)~28 日(日)，場所：山形大学工学部 (27 日(土) 国際事業化センター3F MOT 講義室 A, 28 日(日) 百周年記念会館セミナー室 1)，
開催地：山形県米沢市。

講演題目：`一般化された局所コホモロジー加群の余有限性について`，講演者：川崎謙一郎 (奈良教育大学)，第 87 回米沢数学セミナー『可換 Banach 環と関連分野研究集会』，発表日時：平成 26 年 6 月 27 日(水) 14 時 10 分~14 時 35 分
開催日程：平成 26 年 6 月 26 日(火)~27 日(水)，場所：山形大学工学部 (26 日：4 号館 211 教室，27 日：中示範 C 教室)，
開催地：山形県米沢市。

講演題目：`一般化された局所コホモロジー加群の余有限性について`，
Ken-ichiroh Kawasaki (Nara University of Education)，発表時：平成 26 年 5 月 30 日(金) 19:20--19:50，
Workshop on Commutative Algebra 2014 II in Nara University of Education，場所：奈良教育大学 新館 2 号棟 R5-212，

開催地：奈良県奈良市

〔図書〕(計 0 件)

〔産業財産権〕
出願状況(計 0 件)

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
出願年月日：
国内外の別：

取得状況(計 0 件)

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
取得年月日：
国内外の別：

〔その他〕
ホームページ等
上記研究集会ホームページ

研究集会：Workshop on Harmonic Analysis in Nara 2017 ~ Representation Theory, Operator Algebras and Hypergroups ~，
URL：
http://mailsrv.nara-edu.ac.jp/~kawaken/WorkshopOnHarmonicAnalysisInNara2017_j_index.html

研究集会：Workshop in Nara University of Education 2016 ~ The international meeting on Commutative algebra, Banach algebras (preserver problem), Hypergroups and their related topics ~，
URL：
http://mailsrv.nara-edu.ac.jp/~kawaken/Workshop_open_on_CA2016_e_index1.html

6. 研究組織

(1) 研究代表者
川崎 謙一郎 (Kawasaki Ken-ichiroh)
奈良教育大学・教育学部・教授
研究者番号：60288040

(2) 研究分担者 なし

(3) 連携研究者：
衛藤 和文 (Eto Kazufumi)
日本工業大学・工学部・教授
研究者番号：30271357

(4) 研究協力者：釣井達也 (Tatsuya Tsurii)
大阪府立大学 客員研究員