様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９－１、Ｚ－１９　（共通）

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 ３０ 年　 ６ 月　 ８ 日現在

機関番号：２３９０３
研究種目：基盤研究(C)（一般）
研究期間：2014～2017
課題番号：２６４０００５１

研究課題名（和文）群環の表現とAuslander-Reiten有向グラフ

研究課題名（英文）Representations of group rings and Auslander-Reiten quivers

研究代表者
河田　成人（KAWATA, Shigeto）

名古屋市立大学・大学院システム自然科学研究科・教授

研究者番号：５０１９５１０３

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　2,400,000円

研究成果の概要（和文）：有限群Gの完備離散付値環R上の群環RGの無限表現型のブロックBの整数表現における Auslander-Reiten有向グラフの連結成分を研究した。特にBに属する直既約表現加群Lで、Lを簡約化したモジュラー表現加群Mも直既約であるものに注目した。BのAuslander-Reiten有向グラフの連結成分でLを含むものをCとする。もしLが高さ0であれば、Cの形状はA無限型であること、すなわち、半無限に広がる格子型が半無限に伸びる筒状であることを証明した。また、LとMが共通のヴァーテックスQを持てば、CのヴァーテックスもQであることを示した。

研究成果の概要（英文）：Let G be a finite group and R a complete discrete valuation ring with residue class field k of positive characteristic. Suppose that a block B of the group ring RG is of infinite representation type. Let L be an indecomposable B-lattice, and let C be the stable component of the Auslander-Reiten quiver of B containing L. Assume that the reduced kG-module M of L is indecomposable. Then, we have proved that the tree class of C is A-infinity if L is of height 0. Also, we have shown that if L and M have the same vertex Q, then the vertex of C is Q.

研究分野：有限群の表現論

キーワード：有限群　表現　Auslander-Reiten有向グラフ

１．研究開始当初の背景

多元環の表現論において、直既約加群を点とし、既約写像を矢として得られる Aualander-Reiten 有向グラフは基本的な研究対象である。有限群の正標数の体上のモジュラー表現の場合には Auslander-Reiten 有向グラフの連結成分の形状はよく知られていて、特に野生表現型のブロックでは、そのグラフとしての形状は半平面上に広がる格子型か、半無限に伸びる筒状の格子型である（このような格子型のグラフを A 無限型と呼ぶ）ことが K. Erdmann によって示された[K. Erdmann: On Auslander-Reiten components for group algebras, J. Pure Appl. Algebra 104(1995), 149-160]。その一方で、有限群の完備離散付値環上の整数表現の場合には、有限表現型のブロックに対しては詳しく研究されているが、無限表現型のブロックに対しては、少数の実例しか知られていない。自明なソースを持つ整数表現加群を含む連結成分の形状[S. Kawata: On Auslander-Reiten components and trivial source lattices for integral group rings. J. Algebra 322(2009), 1395–1405]や、主直既約加群とその根基を含む連結成分の形状[S. Kawata: On Auslander-Reiten components and Heller lattices for integral group rings. Algebra Represent. Theory 9 (2006), 513–524]についてはそれぞれ調べられており、それらの形状は A 無限型であることは判明していた。しかし、その他の連結成分について一般的な事実は知られていない。

２．研究の目的

有限群 G の表現論を Auslander-Reiten 理論を応用して研究する。R を標数 0 の完備離散付値環で極大イデアル πR を持つものとし、$k = R/\pi R$ は標数 p（p は素数）の体とする。また、K を R の商体とする。有限群 G の表現論では標数 0 の体 K 上の通常表現と正標数 p の体 k 上のモジュラー表現を並行して研究することが重要であるが、R 上の整数表現はモジュラー表現と通常表現を有機的に結び付ける重要な役割もしている。そのため、群多元環 kG 上のモジュラー表現と群環 RG 上の整数表現を統一的に研究するために Aualander-Reiten 有向グラフを活用する方法を探る。それとともに、有限群の整数表現における Auslander-Reiten 有向グラフの連結成分の形状を、モジュラー表現で得られた結果を踏まえた上で一般論を探求する。さらに、連結成分の形状を利用して、群環上の表現加群の性質を研究する。

３．研究の方法

有限群の表現加群を研究する際には、部分群に注目することが基本となる。直既約 RG-表現加群 L と G の部分群 H に対して、L がある RH-表現加群の G への誘導加群の直和因子として現われるとき、L を H-射影的であるいう。また、L が H-射影的となるような部分群 H の中で位数が最小な Q を L のヴァーテックスと呼ぶ。L のヴァーテクス Q は共役を除いて一意的的に定まり、p-部分群であることが知られている。Q を直既約 RG-表現加群 L のヴァーテックスとすると、ある RQ-表現加群 S が存在して、L は S から誘導された表現加群の直和因子と同型となる。この S を V の Q-ソースと呼ぶ。このヴァーテックスとソースという重要な概念を基本において、群環の Auslander-Reiten 有向グラフを研究する。

また、有限群の整数表現の Auslander-Reiten 有向グラフの連結成分の形状について一般論に迫るために、できるだけ多くの実例を考察する。特に重要な整数表現加群である既約加群や Knorr 加群、また自明なソースを持つ表現加群に注目する。ここで L が既約 RG-加群とは、係数を K にまで拡大すれば既約な KG-加群となるものである。また、L が Knorr 加群とは、L の準同型環が単純な構造を持ち、その振る舞いが既約 RG-表現加群に酷似しているものであり、R. Knorr が提唱した重要な整数表現加群である[R. Knorr: Virtually irreducible lattices, Proc. London Math. Soc. 59 (1989), 99–132]。ところで、L が置換表現加群の直既約因子であるとき、L のソースは自明な加群であることが分かるが、この L を自明なソースを持つ加群と呼ぶ。さらに、主直既約加群の根気の概念を一般化した Heller 加群にも着目する。Heller 加群は主直既約加群を含む Auslander-Reiten 有向グラフの連結成分を研究する過程で見出された興味深い整数表現加群である[S. Kawata: On Heller lattices over ramified extended orders. J. Pure Appl. Algebra 202(2005), 55–71]。Heller 整数表現加群とは、モジュラーkG-表現加群を RG-加群とみなしたときの射影被覆の核として得られる整数表現加群のことである。Heller 加群を含む Auslander-Reiten 有向グラフの連結成分はよく調べられており、一般の連結成分を研究する上でとても役立つものと期待される。

４．研究成果

重要な整数表現加群として高さ 0 の表現加群とそれらを含む Auslander-Reiten 有向グラフの連結成分に注目して研究を行った。高さ 0 の整数表現加群は、R. Knorr が提唱した virtually irreducible という興味深い概念を持つもの（Knorr 加群）に該当し、そのソースはトレース分裂加群であるような興味深い表現加群である。高さ 0 の整数表現加群 L 含む Auslander-Reiten 有向グラフの連結成分を研究して、連結成分の形状が A 無限型になる条件を見つけることができた。すなわち、有限群のブロックには高さ 0 の既約な整数表現加群でモジュラー表現加群に簡約化しても直既約であるものが必ず含まれる（Thompson の定理）が、そのような既約加群を含む Auslander-Reiten 有向グラフの連結成分の形状は無限表現型のブロックにおいては A 無限型であることを証明することができた。こ

の事実はさらに拡張され、次のような性質(#)を持つ直既約 RG-表現加群 L を含むを含む Auslander-Reiten 有向グラフの連結成分 Θ の形状は A 無限型であることを証明した：

(#) モジュラーkG-加群 $L/\pi L$ の直既約分解 $L/\pi L = V \oplus (\bigoplus_i V_i)$ において、V は高さ 0 であり、他の V_i は高さ 0 ではない。

この事実の証明には、Θ 上に自然数値をとる additive function と呼ばれる写像 f を、Θ に属する直既約加群 M に対し $M/\pi M$ の直既約分解において高さ 0 である直既約因子の個数を $f(M)$ と定めることで構成できたことが有効に働いた。

また、群環 RG 上の表現加群を考察する際にはヴァーテックスに着目することが大変有効である。直既約表現加群の有機的な集まりである Auslander-Reiten 有向グラフの連結成分においても、ヴァーテックスに相当する部分群を見つけることが研究の手始めとなる。Auslander-Reiten 有向グラフの安定連結成分 Θ に対し、Θ を構成する直既約 RG-表現加群のヴァーテックスの集合を考えると、その中に位数が最小のものが共役を除いて唯一つ存在することも知られており、この位数が最小のものを Θ のヴァーテックスと呼ぶ。これまで研究されていた実例では、基本的な直既約表現加群のヴァーテックスが連結成分のヴァーテックスに一致していた。そこで、連結成分のヴァーテックスと一致するような直既約表現加群 L の持つ性質を模索した。ヴァーテックスが Q であるような直既約 RG-表現加群 L に対し、次の特性(★)を考える：

(★) モジュラーkG-加群 $L/\pi L$ を直既約分解したときに、Q をヴァーテックスとしてもつ直和因子が現れる。

さて、直既約 RG-表現加群 L は無限表現型のブロックに属しているとし、Auslander-Reiten 有向グラフの連結成分で L を含むものを Θ とする。L のヴァーテックスを Q とし、L は特性(★)を持つと仮定する。このとき、Θ が無限型で Heller 表現加群を含まなければ、連結成分 Θ のヴァーテックスは Q であることが確かめられた。この命題は、直既約 RG-表現加群 X が Heller 加群でなければ、X で終わる almost split 列を簡約化したモジュラー加群の完全列は分裂するという性質から従う。さらにこの場合には、Θ に含まれるすべての直既約 RG-表現加群 X に対し、kG-加群 $X/\pi X$ の直既約分解において Q をヴァーテックスとしてもつ直和因子が現れることを示すこともできた。その結果として、与えられた有限群における Auslander-Reiten 有向グラフの連結成分と局所部分群の連結成分がグラフとして一対一に対応する条件をヴァーテックスと Green 対応の言葉で与えることができた：Green 対応とは、Q の G における正規化部分群を N としたとき、直既約 RG-加群でヴァーテクスが Q であるもの全体の集合 $\mathcal{M}$ と、直既約 RN-加群でヴァーテクスが Q であるもの全体の集合 $\mathcal{L}$ との間に関係付けられた一対一の対応 $f: \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{L}$ のことであって、$\mathcal{M}$ の元 V を N に制限した RN-加群の直既約分解においてヴァーテクス Q を持つものは fV のみで他の直和因子のヴァーテックスは Q ではないという性質を持つ。さらに、この Green 対応は Auslander-Reiten 有向グラフの連結成分の間の対応にも拡張される。すなわち、群環 RG の Auslander-Reiten 有向グラフの連結成分 Θ で Q をヴァーテックスに持つものとし、V を Θ に属する直既約 RG-表現加群で Q をヴァーテックスに持つものとする。RN -表現加群 fV を含む連結成分を Δとおく。ヴァーテックスが Q を含むような直既約 RN -表現加群から構成されるΔの連結部分で fV が属するものを Λ とおく。すると Θ と Λ の間には制限と誘導を通して一対一の対応 ψ がある。実際、Θ に含まれる任意の直既約 RG-表現加群 X に対して、X を N に制限した RN-加群の直既約因子でヴァーテックスが Q を含むものが唯一つだけ存在し、その直既約因子を ψX とおくと、ψX は Λ に含まれる。さらに ψ は Θ から Λ への有向グラフとしての同型を引き起こすことまでは分かっていた。新たに得られた結果として、直既約 RG-表現加群 L が特性(★)を持てば、ψ が L を含む連結成分から fL を含む連結成分への有向グラフとしての同型を引き起こすことを確かめることができた。

P を有限 p-群とし、Q を P の真の正規部分群とする。T を自明な RQ-加群を P へ誘導した RP-表現加群とする。Green の直既約定理より T は直既約で、T のヴァーテックスは Q である。今、群環 RP の Auslander-Reiten 有向グラフの連結成分で T を含むものを Θ とおくと、Θ の tree class は A 無限型であり、T は Θ の端に位置するが、Θ の端に位置していない直既約 RP-表現加群のヴァーテックスは Q を真に含むことや、Θ に属する直既約 RP -表現加群 U について、kP-加群 $U/\pi U$ のすべての直既約因子は $T/\pi T$ のある syzygy に同型であることが確かめられた。特に、$U/\pi U$ の各直既約因子のヴァーテックスは Q であることが分かった。 さらに、U を P-ソースに持つ直既約 RG-表現加群に注目することにより、G の p-部分群 P とその正規部分群 Q に対して、次の性質(i), (ii)を持つ直既約 RG-表現加群 X が存在することを示すことができた:

(i) X のヴァーテックスは P である；

(ii) kG-加群 $X/\pi X$ の直既約分解において、各直既約因子のヴァーテックスは Q に含まれ、それらのうちの少なくとも一つは Q に一致する。

上記の性質(i), (ii)を持つ RG-表現加群は、これまでは限られた有限群とその部分群に対してしか知られていなかったが、上記の事実から、任意の p-部分群 P とその正規部分群 Q に対して、よく知られた整数表現加群の身近に性質(i), (ii)を持つ RG-表現加群の存在を認識することができた。

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計２件）

① 河田成人、群環の表現加群のヴァーテックスと Auslander-Reiten 連結成分について、 数理解析研究所講究録 2053 巻「有限群・代数的組合せ論・頂点作用素代数の研究」(2017)、111–118、査読無

② Shigeto Kawata, On Auslander-Reiten components and height zero lattices for integral group rings, Algebras and Representation Theory vol. 17 no. 5, (2014), 1603–1613, 査読有

〔学会発表〕（計４件）

① 河田成人、群環上の直既約加群のヴァーテックスについて、2017 年度日本数学会秋季総合分科会、2017 年 9 月、山形大学

② 河田成人、群整環上の表現加群のヴァーテックスについて、RIMS 研究集会「有限群のコホモロジー論とその周辺」、2017 年 2 月、京都大学数理解析研究所

③ 河田成人、群環の Auslander-Reiten 連結成分とヴァーテックス、2016 年度日本数学会秋季総合分科会、2016 年 9 月、関西大学

④ 河田成人、有限群のブロックにおける高さ 0 の表現加群と Auslander-Reiten 連結成分について、2015 年度日本数学会秋季総合分科会、 2015 年 9 月、京都産業大学

６．研究組織

(1)研究代表者

河田　成人（KAWATA, Shigeto）
名古屋市立大学・大学院システム自然科学研究科・教授
研究者番号：５０１９５１０３

(2)研究分担者

なし

(3)連携研究者

兼田　正治（KANEDA, Masaharu）
大阪市立大学・大学院理学研究科・教授
研究者番号：６０２０４５７５

古澤　昌秋（FURUSAWA, Masaaki）
大阪市立大学・大学院理学研究科・教授
研究者番号：５０２９４５２５

馬場　良始（BABA, Yoshitomo）
大阪教育大学・教育学部・教授
研究者番号：１０２０１７２４

(4)研究協力者

なし