

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 29 年 6 月 9 日現在

機関番号：24506

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2014～2016

課題番号：26400055

研究課題名(和文)非ネーター群と群環の原始性の研究

研究課題名(英文)Non-noetherian groups and primitivity of group rings of their groups

研究代表者

西中 恒和(Nishinaka, Tsunekazu)

兵庫県立大学・経済学部・教授

研究者番号：20278899

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 2,600,000円

研究成果の概要(和文)：環 R は、忠実な規約(右) R -加群が存在するとき、(右)原始であると言われ、単純環一般化と考えられる。本研究の主要目的は、非ネーター群の群環の原始性をできるだけ一般的な結果として与えることであった。

この目的のために、我々は、SR-グラフ理論と呼ぶものを構築し、それを非ネーター群の群環の原始性を導くために用いた。実際、この方法を用いて、多くの非ネーター群のクラスの群に対してその群環の原始性を導くことができた。例えば、局所自由群に対する結果の別証明を与えることに始まり、群の自由積、融合積に対する結果の拡張、及びHNN拡大群、1関係子群に関する群環の原始性を与えることができた。

研究成果の概要(英文)：A ring R is said to be (right) primitive if it contains a faithful irreducible (right) R -module, which is a generalization of a simple ring. A typical example of primitive ring which is not simple is the ring consists of linear transformations on an infinite dimensional vector space. The main purpose of this work was to determine, as generally as possible, for which fields K the group algebra KG of a non-noetherian group G is primitive.

To do this, we constructed what we call an SR-graph theory, and apply this to proving primitivity of group algebras of non-noetherian groups; the problem can be reduced to find an SR-cycle in a given SR-graph. In fact, by making use of the method, we could show primitivity of group algebras of groups which belong to many classes of non-noetherian groups, including free groups, locally free groups, free products, amalgamated free products, HNN-extensions and one relator groups.

研究分野：代数、無限群の群環

キーワード：群環の原始性 非ネーター群 無限群 グラフ理論 半原始問題 1関係子群 群の融合積 HNN拡大群

1. 研究開始当初の背景

可換な原始環(primitive ring)は体であり、有限次元多元環において原始環は単純環(simple ring) (自明でないイデアルを持たない環) に一致し、この場合それは斜体上の行列環に同型である。従って、原始環は単純環の一般化であり、行列環の無限次元への一般化とも見ることが出来る。単純環の直和で表される環は半単純(semisimple)と呼ばれる。半単純の無限次元への一般化が半原始(semiprimitive)であり、有限群における Maschke の定理を一般の群のものへ拡張しようとする半原始性問題は、この分野の研究における中心課題である。群環の原始性は個々の無限群の性質を強く反映し、一般的取り扱いが容易ではない。この事情が半原始性問題の解決を阻んでいる要因の一つであり、同時に原始群環に無限群の性質と群環の性質を掛け渡す重要な役割を演じさせている。

原始群環の研究は、Formanek ([J. Algebra, 1973]) が非可換自由群に対し、その群環が原始であることを示したことに始まる。続いて、ネーター群 (Noetherian group; 任意の部分群が有限生成である群) の群環の原始性の研究が進められ、1978 年には、Domanov, Farkas-Passsman, Roseblade の一連の研究により、polycyclic 群 (代表的ネーター群) に対する群環の原始性問題が完全に解決された。その後、一般の無限群に対して、群環の原始性を導く必要十分条件が予想されたが、すべて反例が与えられ、現在有効な予想は存在しない。原始群環の例の多くはこの反例のために構成されたものであり、重要な群に対する群環の原始性問題は残されたままとなった。特に、非ネーター群に対しては、3次元多様体の基本群としてあるいはその部分群として重要な群が多数あるにも関わらず、その群環の原始性ほとんど分かっていなかった。

しかし、本研究開始当初までの研究により、幾つかの代表的な非ネーター群に対する群環の原始性を明らかにすることができていた。例えば、自由群の昇鎖 HNN 拡大の群環が原始となるための必要十分条件を導いた (T. Nishinaka, "Group rings of proper ascending HNN extensions of countably infinite free groups are primitive", J. Algebra 317(2007)). 更に、任意の可算無限の局所自由群の群環が原始環となることを示し、Formanek の自由群に対する結果を拡張した (T. Nishinaka, "Group rings of countable non-abelian locally free groups are primitive", Int. J. algebra and computation, 21(2011)).

2. 研究の目的

本研究の目的は、これまでの研究過程で方法論として導入してきたグラフの理論を改良し、非ネーター群と群環の原始性との関係を明らかにし、非ネーター群の群環の原始性

をできるだけ一般的な結果として与えることである。具体的には、以下の(1), (2)の達成を目的とする。

(1)局所自由群の群環原始性を導く過程で導入された(本研究代表者, "GROUP RINGS OF COUNTABLE NON-ABELIAN LOCALLY FREE GROUPS ARE PRIMITIVE" Int. J. Algebra Comput., 21, 409 (2011) 409-431) グラフ理論を改良し SR-グラフ理論を構築する。

(2)SR-グラフ理論を用いて、非ネーター群の群環の原始性をできるだけ一般的な形で導く。この結果により、局所自由群、群の自由積、群の融合積、群の HNN 拡大、擦れ 1 関係子群等、よく研究されている重要な群に対する群環の原始性明らかにする

3. 研究の方法

研究方法は、研究者たちとの直接討論に重点をおいた。そのため、各地の研究集会や関連分野の研究者のいる大学、研究所等に出向き、或は研究者を招き、研究結果を発表しあい、意見交換、討論、打ち合わせを行った。

研究初年度(26年度)7月に、まずグラフの理論を用いた方法で、非ネーター群の群環の原始性を導くことができることを明らかにし、この結果についてカナダで開催された群と群環に関する国際学会 (Brock International Conference on Groups, Rings and Group Rings, Canada) にて表題 "Primitivity of group algebras of non-noetherian groups" で講演を行なった。更に 8 月には、秋田開催された国際学会 (Semigroups, Languages and Algebras) においても同様の趣旨の講演を行った。その年度の終わりには、京都大学数理解析研究所での研究集会 (RIMS) において、HNN 拡大群、群の融合積の群環の原始性に関しこれまで知られている結果が一般化できることについて報告した。

次年度(27年度)に入り、多くの非ネーター群が満足する条件を抽出でき、それら条件を満たす群に対する群環の原始性の証明をほぼ完成していた。この結果について、6月に米国ワシントンで行われた国際会議 "The third Annual Conference for the Exchange of Mathematical Ideas" にて成果発表を行った。この会議はその立ち上げ段階から科研費研究代表者として、オルガナイザー、スポンサーの役割を果たしてきたものである。この会議に参加していた米国のグラフ理論を専門家とする若い研究者 (James Alexander) が、証明で用いているグラフ理論に有益な示唆を与えてくれた。これを機に、

彼と共同研究を行うこととなり、現在の SR-グラフ理論を構築することができた。この SR-グラフを用いて、当初の目的であった非ネーター群の群環の原始性をできる限り一般的な形で証明することに成功した (James Alexander and Tsunekazu Nishinaka, "Non-noetherian groups and primitivity of their group algebras" J. Algebra Vol. 473, (2017) 221-246)。即ち、非可換自由群を部分群として含む群のクラスに対する原始性は、この結果から導きられ得ると考えられる。本質的に、非ネーター群でこのクラスに属さないものは、自由バーンサイド群であり、この群の群環の原始性が残された問題となった。

最終年度 (28 年度) に入り、上記論文も完成し、投稿も終え、この成果発表を国内外の研究集会にて発表を行った。6 月に科研費研究代表者として開催協力も行なっている米国アリゾナでの国際会議 ("The forth Annual Conference for the Exchange of Mathematical Ideas") では、この分野の礎を築いた研究者である、Edward Formanek を招待講演者に招き、有益な議論を交わすことができた。また、この年度 2 月に開催された京都大学数理解析研究所での研究集会 (RIMS) 及び兵庫県立大で開催されたセミナーに招待した無限群を専門とする若い研究者が我々の結果に興味を示した。その後、彼は、我々の結果を用いることによって、双曲群 (hyperbolic group) に対する群環の原始性が導きうることを示した。

4. 研究成果

詳細は、引用文献 を参照されたし。

(1) グラフ理論に関する結果

James Alexander との共同研究により、群環の原始性を導くためのグラフィカルなツール構築した。

$G=(V, E)$, $H=(V, F)$ を同じ V を頂点集合とし、 E, F をそれぞれの辺集合とする単純グラフとする。もし、 G の全ての連結成分が完全グラフであり、 E と F が共通な辺を持たないとき、 $S=(V, E, F)$ を SR-グラフと呼ぶ。このとき、 $S=(G, H)$ と書く。また、 E と F の辺を交互につないでできるサイクルを SR-サイクルと呼ぶ。

定理 1 SR-グラフ $S=(G, H)$ は連結で、 H の連結成分も完全グラフとする。このとき、 S が SR-サイクルを持つための必要十分条件は、 $c(G)+c(H)<|V|+1$ を満たすことである。ここで、 $c(G)$, $c(H)$ はそれぞれ G と H の連結成分の数である。

定理 2 SR-グラフ $S=(G, H)$ において、 H のどの連結成分 $H_i=(V_i, F_i)$ ($i=1, \dots, n$) も完全 m 部グラフとする。 $\mu(H_i)$ を H_i のパーティションに属す頂点の数の最大数、 I を G の孤立点のなす集合とする。このとき、もし、 $\|I\|<n$ かつ任意の i に対して、 $\forall i \geq 2 \mu(H_i)$ であれば S は SR-サイクルをもつ。

以上の結果を、以下の Formanek の方法に適用することで、群環の原始性が導かれる。

Formanek の方法 群環 KG の任意の零でない元 a に対して a で生成されるイデアルの元 $\varepsilon(a)$ が存在して、 a が群環 KG の任意の零でない元の全てにわたるとき、 $\varepsilon(a)+1$ 元全体で生成される右イデアル

$$\rho = \sum_{a \in KG \setminus \{0\}} (\varepsilon(a)+1)KG$$

が KG に一致しないなら KG は原始である。

(2) 一般的な結果

群 G の部分集合 M_1, \dots, M_n と任意の元 $x_1, \dots, x_m \in M_1 \cup \dots \cup M_n$ に対して、隣り合う x_i と x_{i+1} が同じ M_j に属していなければ $x_1 \dots x_m \neq 1$ を満たすとき、 M_1, \dots, M_n は mutually reduced と言う。また、 $M = \{f, \dots, g\}$ に対して、 $M^x = \{x^{-1}fx, \dots, x^{-1}gx\}$ を表す。ここで、以下の条件 (*) を考える。

(*) 任意の有限部分集合 M に対して、 $x_1, x_2, x_3 \in G$ が存在して、 $M^{x_1}, M^{x_2}, M^{x_3}$ が mutually reduced である。

後に見るように多くの非ネーター群は、この性質を満たす。(1) で紹介した SR-グラフ理論を用いて、以下の結果が得られた。

定理 3 G は、(*) を満たし、 G 自身と同じ濃度の自由部分群を持つとする。このとき、 R が零因子を持たない (単位元を含む) 環で、 $|R| \leq |G|$ を満たすなら群環 RG は原始環である。特に、群多元環 KG は任意の体 K に対して原始である。

G が加算無限の群の時、(*) を満たせば、いつでも非可換自由群を部分群として持つことがわかるので、次が得られる。

系 1 G が加算無限の群で、(*) を満たせば、任意の体 K に対して、群多元環 KG は原始である。

(3) 定理 3 の応用

(*) を多くのよく知られた無限群が満たすことがわかるので、以下の群に対する群多

元環の原始性が導かれる。

定理 4 群 G は G 自信と同じ濃度の非可換自由部分群を含むとする。 G の任意の有限個の元に対してそれを含む部分群 N が存在して、 N は A と B の融合積 $A *_H B$ に同型で、 A, B は自明でなく、以下の条件 (†) を満たすとき、任意の体 K に対して、群多元環 KG は原始である。

(†) $A \setminus H$ の元 a が存在して $a^2 \neq 1$, $a^{-1}Ha = 1$ を満たす。

これから、Balogun 結果を改良する系が得られる。

系 2 $G = A *_H B$ が群 A, B の融合積で (†) を満たすならば、任意の体 K に対して群多元環 KG は原始である。

自明でない群の自由積で $\mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_2$ に同型出ないものは (†) を満たすので、次を得る。

系 3 群 G の任意の有限個の元に対して、それを含む G の部分群で群の自由積 $A *_B$ に同型なもので、 $A *_B \cong \mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_2$ を満たすものが存在すれば任意の体 K に対して群多元環 KG は原始である。

HNN 拡大群に対して、以下を得る。

定理 5 G を群とし A, B を G の部分群とする。また、 $G = \langle G, t \mid t^{-1}at = a \rangle$, $a \in A$ を t と同型写像 $\phi: A \rightarrow B$ による HNN 拡大群とする。このとき、

() $AB \subsetneq G$ である G の元 g が存在して、 $g^{-1}Ag \cap A = 1$ か $g^{-1}Bg \cap B = 1$ を満たすなら、任意の体 K に対して群多元環 KG は原始である。

() 群 G^* は G 自信と同じ濃度の非可換自由部分群を含むとする。
もし $A = G, B \subsetneq G$ で G が () を満たすなら、任意の体 K に対して群多元環 KG^* は原始である。

系 1 を利用して、捩れ 1 関係子群の群多元環の原始性が得られる。

定理 6 $G = \langle X \mid W \rangle$ を捩れ 1 関係子群 ($n > 1$) とする。この時、任意の体 K に対して、群多元環 KG は原始である。

< 引用文献 >

James Alexander and Tsunekazu Nishinaka, "Non-noetherian groups and primitivity of their group algebras" J.

Algebra Vol. 473, (2017) 221-246

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計 7 件)

James Alexander and Tsunekazu Nishinaka, "Non-noetherian groups and primitivity of their group algebras" J. Algebra, 査読有, Vol. 473, (2017) 221-246

DOI:

<https://doi.org/10.1016/j.jalgebra.2016.10.032>

Tsunekazu Nishinaka, "Free Burnside groups and their group rings", 数理解析研究所講究録 2008, 査読無, (2016) 52-63

<http://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/~kyodo/kokyuroku/contents/pdf/2008-07.pdf>

Tsunekazu Nishinaka, "Uncountable locally free groups and their group rings" arXiv:1601.00295, 査読無, (2016) <https://arxiv.org/abs/1601.00295>

Tsunekazu Nishinaka, "Infinite groups and primitivity of their group rings" Proceedings of the 2nd Annual Conference for the Exchange of Mathematical Ideas, 査読無, (2016) 1-15

<http://noetherian.net/conference/Proceedings/IowaProcR.pdf>

Tsunekazu Nishinaka, "HNN-extensions, amalgamated free products and their group rings" 数理解析研究所講究録 1964, 査読無, (2015) 46-54

<http://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/~kyodo/kokyuroku/contents/pdf/1964-07.pdf>

Tsunekazu Nishinaka, "Non-Noetherian groups and primitivity of their group rings", 数理解析研究所講究録 1915, (2014), 査読無, 58-68

<http://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/~kyodo/kokyuroku/contents/pdf/1915-09.pdf>

Tsunekazu Nishinaka, "Locally freely productable groups and the primitivity of their group rings" 数理解析研究所講究録 1873, 査読無, (2014) 31-39

<http://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/~kyodo/kokyuroku/contents/pdf/1873-06.pdf>

[学会発表](計 13 件)

Tsunekazu Nishinaka, "SR-graph theory and primitivity of group algebra" Ryoma Mathematics Seminar 「高知大学(高知県・高知市)」, 2017年3月28日

Tsunekazu Nishinaka, "An application of SR-graphs to group algebras of non-noetherian groups", Conference of

groups, rings and group rings: West Kobe Mathematics Seminar 「兵庫県立大学(兵庫県・神戸市)」, 2017年2月28日

Tsunekazu Nishinaka, "An application of two-edge colored graphs to group algebras of non-noetherian groups", Developments of Language, Logic, Algebraic system and Computer Science 京都大学「(京都府・京都市)」, 2017年2月21日

Tsunekazu Nishinaka, "An application of graph theory to group algebras", The Fourth Annual Conference for the Exchange of Mathematical Ideas 「プレスコット(アメリカ)」, 2016年6月11日

Tsunekazu Nishinaka, "Uncountable locally free groups and their group rings" 日本数学会年会 「筑波大学(茨城県・つくば市)」 2016年3月19日

Tsunekazu Nishinaka, "Free Burnside groups and their group rings" Algebraic system, Logic, Language and Computer Science RIMS 「京都大学(京都府・京都市)」, 2016年2月16日

Tsunekazu Nishinaka, "Uncountable locally free groups and their group algebras." 2016 Joint Mathematics Meetings; AMS, MAA 「シアトル(アメリカ)」, 2016年1月6日

Tsunekazu Nishinaka, "Uncountable locally free groups and their group algebras." The Conference of Ring Theory in Honor of Professor George Szeto On His Retirement 「岡山大学(岡山県・岡山市)」, 2015年11月14日

Tsunekazu Nishinaka, "Primitivity of non-noetherian group algebras" The Third Annual Conference for the Exchange of Mathematical Ideas 「メーリーワシントン(アメリカ)」, 2015年6月6日

Tsunekazu Nishinaka, "Free Burnside groups and their group rings" ERAU-Prescott MATHEMATICS SEMINAR 「プレスコット(アメリカ)」, 2015年6月4日

Tsunekazu Nishinaka, "HNN-extensions, amalgamated free products and their group rings" New contact point of algebraic systems, logics, languages, and computer sciences RIMS「京都大学(京都府・京都市)」, 2015年2月16日

Tsunekazu Nishinaka, "Primitivity of Group Algebras of Groups with Free Subgroups" Semigroups, Languages and Algebras 「秋田大学(秋田県・秋田市)」 2014年8月8日

Tsunekazu Nishinaka, "Primitivity of group algebras of non-noetherian groups" Brock International Conference on Groups, Rings and Group Rings 「セントキヤサリンズ(カナダ)」 2014年7月29日

〔図書〕(計0件)

〔産業財産権〕

出願状況(計0件)

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
出願年月日：
国内外の別：

取得状況(計0件)

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
取得年月日：
国内外の別：

〔その他〕

ホームページ等

<http://uh-kobe.private.coccan.jp/>
<http://kyoin.u-hyogo.ac.jp/staff/econ/nishinaka/>

6. 研究組織

(1) 研究代表者

西中 恒和 (Nishinaka, Tsunekazu)
兵庫県立大学・経済学部・教授
研究者番号：20278899

(2) 研究分担者

()

研究者番号：

(3) 連携研究者

()

研究者番号：

(4) 研究協力者

()