様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９－１、Ｚ－１９　（共通）

科研費
KAKENHI

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 ３０ 年　 ５ 月 １１ 日現在

機関番号：１０１０１
研究種目：基盤研究(C)（一般）
研究期間：2014～2017
課題番号：２６４０００５９

研究課題名（和文）ループ群による曲面のワイエルシュトラス型の表現公式とその応用

研究課題名（英文）A Weierstrass type representation for surfaces via loop group method and its applications

研究代表者
小林　真平（Kobayashi, Shimpei）

北海道大学・理学研究院・准教授

研究者番号：４０４０８６５４

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　3,600,000円

研究成果の概要（和文）：可積分曲面とは，曲面を決定する偏微分方程式が解ける微分方程式を示す総称である可積分系で表される曲面のことである．特に，多くの可積分曲面は無限次元リー群であるループ群を用いることにより，正則関数を用いたワイエルシュトラス型の表現を持つ．
本研究では，ワイエルシュトラス型の表現公式を用いて種々の可積分曲面について詳細に調べた．特に，アフィン調和写像，３次元双曲空間のガウス曲率負一定曲面，離散アフィン曲面，アフィン平面曲線，３次元反ド・ジッター空間の極大曲面等について重要な結果を得た．

研究成果の概要（英文）：Surfaces whose structure equation can be given by an integrable system are often called integrable surfaces. Here the integrable systems is a generic term used to refer to solvable (partial) differential equations. In particular many integrable surfaces have a Weierstrass type representation in terms of loop groups and holomorphic functions.
In this research we studied integrable surfaces by using the Weierstrass type representation. Concretely, we studied affine harmonic maps, constant Gaussian curvature surfaces in 3-dimensional hyperbolic space, discrete affine spheres, affine plane curves and maximal surfaces in 3-dimensional Anti-de Sitter space.

研究分野：幾何学

キーワード：可積分曲面　ループ群　ワイエルシュトラス型の表現公式　停留曲面

１．研究開始当初の背景

汎関数の停留点として定式化される停留曲面の研究は，オイラーの時代から長い歴史を有している．一方，Korteweg-de Vries 方程式を始めとする解ける微分方程式の総称である可積分系の構造が明らかにされたのは，１９７０年代以降である．さらに，さまざまな停留曲面の構造方程式が，しばしば可積分系になることが認識され，可積分系の理論が曲面の微分幾何に応用されるようになったのは１９９０年代以降である．特に，３次元ユークリッド空間の平均曲率一定曲面（体積一定という条件下の面積汎関数の停留曲面）に対する，ドルフマイスター・ペディット・ウーによる無限次元のリー群であるループ群を用いたワイエルシュトラス型の表現公式の確立は，極小曲面（平均曲率が０で一定）のエネパー・ワイエルシュトラスの表現公式の自然な一般化であり，可積分系の理論の曲面の微分幾何への有効性を表している．これまで，ワイエルシュトラス型の表現公式を用いたさまざまな研究（非自明な基本群を持つ曲面の構成，　漸近挙動の解析）が積極的に行われ，さまざまな成果が得られた．このように，可積分系で特徴づけられる曲面は近年，可積分曲面と呼ばれる．

一方可積分曲面はユークリッド空間に限らず，さまざまな幾何学においても現れる．例えば，射影空間の射影極小曲面はそのような例である．このように，空間に作用する群がユークリッド運動群より大きい（または小さい）場合の可積分曲面に対するワイエルシュトラス型の表現公式及び可積分系の理論を用いた研究は一部を除き，為されていない．

さらにまた，近年可積分曲面がさまざまな分野で現れることが知られて来た．特に，曲面の基本群の特殊線形群への表現(Hitchin 表現，射影空間のラグランジュ極小曲面と関係がある)や数理物理学の AdS/CFT 対応(反 de Sitter 空間の極大曲面の面積が関係している）が典型的な例である．

このような背景から，これまでの３次元ユークリッド空間の平均曲率一定曲面へのワイエルシュトラス型の表現公式を用いた研究から，さらに広いクラスの可積分曲面に対する，ループ群を用いたワイエルシュトラス型の表現公式や，それを用いた研究が重要であると考えるに至った．

２．研究の目的

ユークリッド運動群より大きい群及び，小さい群が働く空間内の可積分曲面に対して，ループ群を用いたワイエルシュトラス型の表現公式を統一的に確立し，位相幾何や数理物理の問題に対する応用を行うことを研究の目的とした．

また，ワイエルシュトラス型の表現公式を用いて，可積分曲面の微分幾何学的な性質を明らかにし，種々の特徴づけを行うことも研究の目的とした．

３．研究の方法

可積分曲面が持つ，隠れた対称性を明らかにし，その構造を用いてワイエルシュトラス型の表現公式を導くことにした．特に隠れた対称性として，無限次元リー群，円周から有限次元リー群への写像であるループ群に着目して研究を推進することにした．有限次元リー群としては，種々の幾何に付随する自然な有限次元リー群を用いた．

４．研究成果

（１）リー群へのアフィン調和写像：リーマン面から両側不変リーマン計量を持つリー群への調和写像が可積分系の理論と密接な関係を持つ事は,ウーレンベック，シーガル等によってよく知られた事実である.両側不変リーマン計量を両側不変アフィン接続に一般化したリー群を与え，リーマン面からこのリー群への調和写像の一般化であるアフィン調和写像を考えた．両側不変アフィン接続が両側不変リーマン計量から定まる場合は,アフィン調和写像は元の調和写像になり,アフィン調和写像は調和写像の自然な一般化である．この研究では,両側不変接続をもつリー群へのアフィン調和写像に対して,ループ群によるワイエルシュトラス型の表現公式を持つことを示した．特に両側不変リーマン計量を持たない代表的なリー群である可解群に対してのアフィン調和写像の表現公式を得ることができ，さらに具体的に写像を表すことができた．研究成果は，筑波大学の井ノ口順一氏とミュンヘン工科大学のドルフマイスタージョセフ氏との共同研究による（雑誌論文２）．

（２）３次元ハイゼンベルグ群の極小曲面：３次元ユークリッド空間のベルンシュタインの定理とは，全平面でグラフとなる極小曲面は平面に限るというものである．ユークリッド空間とは限らないリーマン多様体内の極小曲面に対する同様の問題はベルンシュタインの問題と呼ばれている．
この研究では，３次元ハイゼンベルグ群内の水平な平面上のグラフとなる極小曲面についてのベルンシュタイン問題についての研究である．研究成果として,水平な平面上のグラフである極小曲面は,ひとつの正則２次微分とその２径数族によって表現されるという事がわかった．この結果自体は，すでに他の研究者達によって得られていたが，ループ群の手法とワイエルシュトラス型の表現公式を用いることによって，新しい短い証明を与えた.さらに，ループ群の手法を用いる事によって，２径数族の幾何学的な意味が

わかった．この研究成果は，筑波大学の井ノ口順一氏とミュンヘン工科大学のドルフマイスタージョセフ氏との共同研究による．（雑誌論文４）．

（３）離散ガウス曲率負一定曲面に対するワイエルシュトラス型の表現公式：可積分曲面の理論は，滑らかな場合だけでなく，離散化された対象に対しても有効に適用できる．特に，ガウス曲率負一定曲面に対する離散化は，良く知られている．一方，滑らかなガウス曲率負一定曲面に対しては，ワイエルシュトラス型の表現公式が知られている．この研究では３次元ユークリッド空間内の離散ガウス曲率負一定曲面に対するワイエルシュトラス型の表現公式を確立した．一見するとこの定式化は，滑らかなものの自然な離散化には見えないが，様々な具体例を通して見ると，この離散化が適切であることがわかる．さらに離散的な場合の公式は，さまざまな具体的な応用が期待できる（雑誌論文１）．

（４）３次元双曲空間内のガウス曲率一定曲面の特徴付け：筑波大学の井ノ口順一氏のと共同研究において，ループ群の構造を用いて，適切なガウス写像を構成し，３次元双曲空間内のガウス曲率一定曲面の特徴付けを得る事ができた．この研究は，研究課題の一つである基本群の表現の簡単な場合に相当するものであり，重要な結果である．現在結果を論文に纏めているところである．

（５）反 de Sitter 空間の極小曲面：同済大学（中国）の Wang Peng 氏との共同研究を行い反 de Sitter 空間の極小曲面について，正則化面積についての厳密な数学的定式化を得る事ができた．この研究成果は，幾何学および弦理論双方のコミュニティに取って十分な意義を持つ結果である．現在，論文発表に向けて研究結果の精査をしている所である．

（６）離散アフィン球面のワイエルシュトラス型の表現公式：福岡大学の松浦望氏との共同研究を行い，離散アフィン球面の表現公式を完全に確立した．アフィン球面は，空間に働く群がユークリッド運動群より大きい群であり，この研究までにワイエルシュトラス型の表現公式，離散化などが知られて来た．本研究によって，離散アフィン球面のワイエルシュトラス型の表現公式を確立する事ができ，簡単な離散データをもちいて複雑な離散アフィン球面を得る事ができるようになった．特に，非固有と呼ばれるクラスについての表現公式については，非常に簡明な表現公式を得る事ができた．連続の場合，ワイエルシュトラス型の表現公式は，無限次元リー群であるループ群の分解定理を用いている為，具体的に求める事はほとんどの場合困難である．しかしながら離散の場合，ループ群の分解が２つの行列の積の交換の問題に置き換わるので具体的に実行できる．従って様々な具体的な問題に応用できるという利点がある．実際に実用的なアルゴリズムや良い具体例の構成はこれからの課題である．この研究成果については，論文を纏めて現在投稿中である．

（７）アフィン平面曲線の総合的研究：これまで,ユークリッド空間の曲線を範として,Blaschke や E. Cartan を始めとするさまざまな研究者が,等積アフィン群や射影変換群について不変な曲線論を展開してきた．しかしながら,等積アフィン群と射影変換群の間に位置する一般アフィン群で不変な曲線論については，今まで十分な研究が行われてこなかった.そこで,神戸大学の佐々木武氏との共同研究において,この群で不変な曲線論の基礎を展開した.特に,一般アフィン群の元での長さを定義し,変分問題を論じた．研究成果については，論文を纏めて現在投稿中である．

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計４件）

1. Shimpei Kobayashi, Nonlinear d'Alembert formula for discrete pseudospherical surfaces, Journal of Geometry and Physics, 119 (2017), 208-223（査読有）．

2. Josef Dorfmeister, Jun-ichi Inoguchi, Shimpei Kobayashi, A loop group method for affine harmonic maps into Lie groups (with J. F. Dorfmeister, J. Inoguchi), Advances in Mathematics, 298 (2016), 207-253 （査読有）．

3. Shimpei Kobayashi, A construction method for discrete constant negative Gaussian curvature surfaces, Mathematical Progress in Expressive Image Synthesis III, Extended and Selected Results from the Symposium MEIS2015, (2016), 21-33 （査読有）．

4. Josef Dorfmeister, Jun-ichi Inoguchi, Shimpei Kobayashi, On the Bernstein problem in the three-dimensional Heisenberg group via loop groups, Canadian Mathematical Bulletin, 59 (2016), no. 1, 50-61 （査読有）．

〔学会発表〕（計 16 件）

1. 小林真平， Loop group method for surfaces with constant Gaussian curvature in the 3-dimensional hyperbolic space, Geometry of Submanifolds and Integrable Systems The 15th OCAMI-RIRCM Joint Differential Geometry Workshop & The 3rd OCAMI-KOBE-WASEDA Joint International Workshop on Differential Geometry and Integrable Systems; 大阪市立大学（大阪府・大阪市）; 3 月 29 日, 2018 年

2. 小林真平， 3次元ハイゼンベルグ群の極小曲面について I, II, 幾何学阿蘇研究集会; 休暇村 南阿蘇 (熊本県・阿蘇郡); 9 月 27 日, 2017 年

3. Shimpei Kobayashi, Minimal surfaces with symmetries in the three-dimensional Heisenberg group, Higgs Bundles, Harmonic Maps, and Integrable Systems; ハノーファー大学 (ドイツ・ライプニッツ市); 8 月 18 日, 2017 年

4. Shimpei Kobayashi, A construction method for discrete indefinite affine spheres, The Tenth IMACS International Conference on Nonlinear Evolution Equations and Wave Phenomena: Computation and Theory; ジョージア大学 (アメリカ・アセンズ市); 3 月 31 日, 2017 年

5. Shimpei Kobayashi, Surfaces with constant Gaussian curvature in the 3-dimensional hyperbolic space via loop groups, Geometry colloquium；マサチューセッツ大学 (アメリカ・アマースト市); 3 月 27 日, 2017 年

6. Shimpei Kobayashi, Nonlinear d'Alembert formula for discrete pseudospherical surfaces, OCAMI-KOBE-WASEDA Joint International Workshop on Differential Geometry and Integrable Systems, 神戸大学（兵庫県・神戸市）; 2 月 16 日, 2017 年

7. 小林真平， 平均曲率一定曲面に対するワイエルシュトラス型の表現公式(入門), 幾何学コロキウム; 北海道大学（北海道・札幌市）; 12 月 16 日, 2016 年

8. Shimpei Kobayashi,A discrete version of the DPW method for discrete constant negative Gaussian curvature surfaces, Extra lectures by guest speakers for Dorfmeister's lectures; 早稲田大学（東京都・特別区）; 10 月 10 日, 2016 年

9. Shimpei Kobayashi, Constant negative Gaussian curvature surfaces in the 3-dimensional hyperbolic space, One day workshop at Waseda Univeristy; 早稲田大学（東京都・特別区）; 10 月 8 日, 2016 年

10. 小林真平,可積分の手法によるリー群への調和写像, 第６３回幾何学シンポジウム, Okayama University, Okayama Japan; August 27, 2016. （岡山県・岡山市）; 8 月 27 日, 2016 年

11. Shimpei Kobayashi, A construction method for discrete constant negative Gaussian curvature surfaces, MEIS2015; 九州大学（福岡県・福岡市）; 9 月 26 日, 2015 年

12. 小林真平,双曲平面への調和写像と曲面論への応用, 幾何学コロキウム; 東京大学（東京都・特別区）; 11 月 7 日, 2014 年

13. 小林真平,３次元ハイゼンベルグ群内の極小曲面について, 部分多様体とリー群作用 2014; 東京理科大学（東京都・特別区）; 9 月 6 日, 2014 年

14. 小林真平,A loop group method for affine harmonic maps into Lie groups, RIMS 研究集会 「群作用と部分多様体論の展開; 京都大学（京都府・京都市）; 6 月 26 日, 2014 年

15. 小林真平,デモラン曲面のガウス写像による特徴付けについて, 関大微分幾何研究会; 関西大学（大阪府・吹田市）; 6 月 6 日, 2014 年

16. 小林真平, Poisson's equations for inhomogeneous dielectric materials and neutral harmonic maps, PDE セミナー; 北海道大学（北海道・札幌市）; 4 月 17 日, 2014 年

〔図書〕（計 0 件）

〔産業財産権〕

○出願状況（計 0 件）

○取得状況（計 0 件）

〔その他〕
ホームページ等
https://sites.google.com/site/kobayashishimpeisite/

６．研究組織
(1)研究代表者
　小林　真平（KOBAYASHI SIMPEI）
　北海道大学・理学研究院・准教授
　研究者番号：40408654

(2)研究分担者 なし

(3)連携研究者 なし

(4)研究協力者 なし