様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９－１、Ｚ－１９　（共通）

科研費 KAKENHI

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 ３０ 年　 ６ 月　 ４ 日現在

機関番号： １５３０１
研究種目： 基盤研究(C)（一般）
研究期間： 2014～2017
課題番号： ２６４０００７１

研究課題名（和文）可積分測地流に関する発展的研究

研究課題名（英文）Advanced study of integrable geodesic flows

研究代表者
清原　一吉（Kiyohara, Kazuyoshi）

岡山大学・自然科学研究科・教授

研究者番号：８０１５３２４５

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　3,700,000円

研究成果の概要（和文）：この研究により、「可積分測地流」に関わるいくつかの主要な問題に対して、明確な進展をもたらした。ひとつめは、C-射影同値の問題 において，必ずしも非特異でない状況を第一積分の言葉で表現し、多様体の構造を明らかにした。ふたつめは楕円体 を含む、ある種のLiouville 多様体の一般点の共役跡の特異点のうち，分岐点のまわりの状況を詳しく調べ，さらに全体の形状について明らかにした。３つ目は糸とピンによる楕円面の描画についてのStaudeの結果を、リウヴィル多様体にまで広げた。４つ目は測地流の可積分性に関するEisenhartの結果ケーラー版を示した。

研究成果の概要（英文）：We established a certain development for some problems on "integrable geodesic flows". First, we succeeded enlarging the structure theorem on c-projective equivalence problem to certain degenerate case. Second, we studied the conjugate locus on ellipsoid and Liouville manifolds; we specified the form of singularities arising at branch points and clarified their total shape. Third, we developed the classical result of Staude on the drawing of ellipsoid by pins and thread to Liouville manifolds of any dimension. Fourth, we obtained a Kaehlerian analogue of Eisenhart's theorem concerning the integrability of geodesic flows.

研究分野： 微分幾何学

キーワード： 測地線　可積分測地流　リウヴィル多様体　c-projective equivalence　conjugate locus

１．研究開始当初の背景

可積分測地流、あるいはもっと一般に可積分なハミルトン力学系の歴史は 古い。解析力学が成立して後、「保存量と還元」というメカニズムが認識されてきたが、その最も極端な場合が可積分系である。この場合問題は一次元に還元され、基本的には明示的に可解である。可積分測地流に関して言えば保存量即ち第一積分の最も簡単な例はキリングベクトル場であり、回転面の場合これによって測地線の方程式は明示的に解ける。他方、楕円体の測地流が可積分であることがJacobi 以来知られており、これは一般の場合に0でないキリングベクトル場を持たない。後者の場合、 既にLiouville においてその一般化の研究がなされていて､私による Liouville 多様体の研究とその複素化である Kaehler-Liouville 多様体の研究につながっている

２．研究の目的

この研究の目的は、「可積分測地流」に関わるいくつかの主要な問題に対して、明確な進展をもたらすことである。それらは大きく4つの問題に分けられる。

(ア)Liouville 多様体の一般点の共役跡とカットローカスの問題｡我々は既に論文 “J. Itoh, K. Kiyohara, Manuscripta Math. 114 (2004), 247–264” において、楕円面の一般点の共役跡が丁度4つのカスプを持つという、いわゆるJacobi’s last geometric statement を証明した。しかもそれら4つのカスプはその対蹠点を通る曲率線上に現れる事も示した。また、 “J. Itoh, K. Kiyohara, Asian J. Math. 14 (2010), 257–290” において、その一部の結果を高次元楕円体、さらにはある種のコンパクトなLiouville 多様体に拡張し、それらの多様体におけるカットローカスの構造を完全に明らかにした。

我々の目標は、上記の高次元の場合に共役跡内に現れる特異点集合の構造を完全に決定することである。特に高次元の場合は共役跡に分岐点が現れ、それは Arnold のいわゆる D_4^{+}-Lagrange 特異点であることが確からしい。その点を明確にし，共役跡全体の様子を明らかにしたい。さらに，ノンコンパクトの場合に，カットローカスの構造を(少なくとも2次超曲面の場合には)明らかにしたい。これはリーマン幾何において，基本的知識に属するべき事柄と考える。

(イ)Hermite 多様体の C-(または h-)射影同値の問題｡この問題は Kaehler 多様体における，射影同値のある種の類似概念として最近何人かの研究者によって研究されているものである。その Levi- Civita 接続が互いに射影同値になるようなリーマン計量は一般の場合にLiouville-Staeckel 型の計量に なる(Levi-Civita の結果)が､Kaehler 多様体の場合に同じことをやると trivial なものになってしまう。そこで条件を緩めて，曲線 $c(t)$ の加速度ベクトル(Levi-Civita 接続の意味で)が各点で速度ベクトルの張る1次元複素ベクトル空間に属するような曲線のクラスを考え(測地線の拡張)，そのクラスを同じくする2つのKaehler 計量を互いに C-射影同値という(大槻・田代による定義)。我々は既にK.Kiyohara-P.Topalov (Proc. Amer. Math. Soc. 139 (2011), 231-242) により，コンパクト性とある種の非退化性のもとで，この Kaehler 多様体がランク1の Kaehler-Liouville 多様体になり，従って複素射影空間と双正則になる，ということを示した。今回の研究では，まずある種の退化性を許した状況で, この Kaehler 多様体がやはり Kaehler-Liouville 多様体であり，ある特別な正則束の構造をもつことを示したい。これはある意味で， Apostlov, Calderbank らの結果の別証明となるが,

Kaehler-Liouville 多様体の理論からのアプローチであり，Hermite 多様体への拡張の観点からも独自の意味があると考える。さらに，上記 2011 年の論文でも述べたように，この概念は自然に Hermite 多様体上に類似の(P Q 同値と呼ばれる)概念を導く。この概念と Hermite-Liouville 多様体との関係を 大域的に明らかにし, かつ本来の C-射影同値との関係を明らかにする事が次の目的である。

(ウ)Liouville 多様体において、ラプラス作用素の固有値分布の構造を明らかにする。主な手法となるのは、いわゆる半古典近似(Maslov の量子化条件または Bohr-Sommerfeld rule)とその拡張である。この手法自体は良く知られているが､我々は既に Liouville 曲面の場合に、特異な古典状態 の近傍では、新しい「半古典近似」が必要であることを示し、その具体的な表示を得た(Kiyohara, Diff. Geom. App. 29 (2011) S125-S134)。今回その高次元版を研究する。鍵となるのはやはり特異 Lagrange 集合の定める｢特異半古典状態｣の記述であるが, 2 次元のときの「放物柱関数」による方法を適当に修正して使えるのではないかと考えている。

(エ)可積分測地流の理論として，我々は Liouville 多様体と Kaehler-Liouville 多様体, さらには Hermite-Liouville 多様体の理論を発展させて来たが，それらは第一積分の言葉で言えば，各余接空間ごとに1次または2次の多項式であるという性質を持つ。そこで可積分測地流をもつ多様体の全体を見るとき，各余接空間ごとに2次以下の多項式であるような第一積分によってその測地流が可積分となっている多様体を分類するというのが，現実的で興味深い問題となる。実際, Kaehler-Liouville 多様体の奇数次元版として，一部のトーリック佐々木多様体が現れる事は容易に想像されるし，当然 その Hermite 版もある。(注:コンパクトな Kaehler-Liouville 多様体は一般にトーリック多様体である。)一般的な分類の枠組みができれば望ましいが, それが難しければまず上記の場合の分類を目指す｡またその上記の場合に顕著に現れるが, 接触分布上に計量を制限すれば，「可積分測地流｣をもつ subriemann 幾何の例を得ることになる。我々はこの場合に測地線の挙動を詳細に調べ, カットロー カスや共役跡の様子を明らかにしたい。これらの事は制御理論の見地からも興味を持たれる事と思われる。

３．研究の方法

平成 26 年度の研究計画・方法は以下の通りである｡最初の年度では次の4つの問題をほぼ平行して研究する。

1. 楕円体を含む、ある種の Liouville 多様体の一般点の共役跡の特異点のうち，分岐点のまわりの 状況を詳しく調べ, さらに全体の形状について調べる。

2. C-射影同値の問題において，必ずしも非特異でない状況を第一積分の言葉で表現し, Kaehler- Liouville 多様体の構造理論に帰着させる。その手法を通じて，(Calderbank らのものとは異なる)可積分測地流の立場からのこの問題への解釈を与える。

3. 球面に微分同相な Liouville 多様体について、ラプラス作用素の固有値分布の構造に対する特異半古典近似の方法を確立する。2 次元の場合と同様，先ず固有値全体の集合を次元分の非負整数の組 といくつかの符号によってラベル付け，これによる通常の半古典近似を記述し，それが特異 Lagrange 集合の近傍で破綻することを確認する。その後に放物柱関数を使ってそこで有効な新たな半古典近似の式を与える。

4. Kaehler-Liouville 多様体の奇数次元版として現れるトーリック佐々木多様体およびその Hermite 版を研究する。ここでの目標は適切な定義を与える事と，大域的な分類になる。Kaehler-Liouville 多様体の既知の理論から導かれる多数の例を検討するところから始める。

これらの問題に対する代表者・分担者及び研究協力者の役割は次の通りである。
代表者は上記の問題をすべて研究する。分担者の伊藤氏は1の問題を最小跡(カットローカス)の専門家の立場から研究する。また，彼の手法はリーマン幾何とともに組み合わせ的な幾何に基礎をおいたものであり，代表者の，どちらかというと解析的な手法とは異なる立場から、この問題に取り組む。

以上の研究のため、代表者及び分担者は国内外の研究者と適宜研究連絡を行い、研究内容についての討論を行う。また関連研究集会に参加し，関連する講演を聴くと共に，出席者との意見交換を通じて，研究に有用な新知識の習得につとめる。

４．研究成果

まず研究計画・方法としてあげていた4つの項目のうち2つについて実質的進展があった。ひとつは、「C-射影同値の問題 において，必ずしも非特異でない状況を第一積分の言葉で表現し, Kaehler- Liouville 多様体の構造理論に帰着させる。その手法を通じて, (Calderbank らのものとは異なる)可積分測地流の立場からのこの問題への解釈を与える。」というものであるが、これについて、妥当な範囲での退化した状況を考え、Kaehler-Liouville 多様体の理論を適用して、その状況での多様体の構造を明らかにした。その結果は "K. Kiyohara, C-projective equivalence and integrability of the geodesic flow, J. Geom. Phys., 87 (2015), 286-295" で公表された。ふたつめは「楕円体を含む、ある種のLiouville 多様体の一般点の共役跡の特異点のうち，分岐点のまわりの状況を詳しく調べ，さらに全体の形状について調べる。」というものであるが、D4+ ラグランジュ特異点が現れる状況においての細部のチェックをほぼ終了させることができた。この論文はその後完成し、現在ある雑誌に投稿され、査読中であるが、論文自体も長く（５０数ページ）内容も深いので、査読に非常に時間がかかっているようである（J. Itoh, K. Kiyohara, The structure of the conjugate locus of a general point on Ellipsoids and certain Liouville manifolds)。

さらに「研究の目的」として設定した4つの項目のうち、(ア)共役跡とカットローカスの問題、と関連した内容と思われる論文: Thread construction revisited (やはり伊藤氏との共著)が日本数学会の欧文誌 に掲載された。この論文においては、糸とピンによる楕円の描画が2次曲面に対しても可能であることを示した、19世紀後半のStaudeの結果を、現代的な視点から再考し、その適用範囲を大きくリウヴィル多様体にまで広げたものである。この結果はリウヴィル多様体の測地線の挙動の詳細な知識に基づいており、それは上記の共役跡の研究から得られたものである。

また、研究目的の(イ)の エルミート多様体のc-射影同値の問題について研究した。具体的にはエルミート多様体のおいてc-射影同値の類似である、いわゆるPQ-同値を許容する場合、自然な形でc-射影同値を許容するケーラー計量が対応することを示した（未発表ノート段階）。さらに S. Rosemann と共同で次の興味深い結果を得た:「ケーラー多様体において(局所的に)その測地流に1つの第一積分が 存在し、それが fiberwise にエルミート形式で、Lie bracketで可換な(1,0)型のベクトル場の直交フレームで「対角化可能」とする 。この

時、適当な非退化条件の元で、この多様体はKaehler-Liouville 多様体となる。特にその測地流は完全積分可能となる。」この結果の重要な点は、ただ1つの第一積分の存在の仮定から、測地流の完全積分可能性が従うことである。実の場合にEisenhartによる類似の結果があり(Separable systems of Staeckel, Ann. Math. (2) 35 (1934), 284-305), これはそのケーラー版となっている。この結果は現在プレプリントの状態であり、共著者との最後の調整をしているところである。

５．主な発表論文等

（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計　５件）

1. J. Itoh, F. Otsuka, A natural generalization of regular convex polyhedral, Topology Appl., 219, 43-45, 2017, 査読あり、https://doi.org/10.1016/j.topol.2017.01.004.
2. J. Itoh, K. Kiyohara, Thread construction revisited, J. Math. Soc. Japan, 68, 917-938, 2016, 査読あり、DOI: 10.2969/jmsj/06830917.
3. J. Itoh,J. Rouyer, C. Vilcu, Moderate smoothness of most Alexandrov surfaces, Internat. J. Math., 26, 1-14, 2015, 査読あり、DOI: 10.1142/S0129267X15400042.
4. J. Itoh, C. Vilcu, Every graph is a cut locus, J. Math. Soc. Japan, 67, 1227-1238, 2015, 査読あり、DOI:10.2969/jmsj/06731227.
5. K. Kiyohara, C-projective equivalence and integrability of the geodesic flow,J. Geom. Phys., 87, 286-295, 2015, 査読あり、DOI: J-geomphys.2014.07.023.

〔学会発表〕（計　８件）

1. 清原一吉、測地流の可積分性に関する Eisenhart の定理のケーラー版、福岡大研究集会、２０１７年１１月３日、福岡大学。
2. 清原一吉、測地流の可積分性に関する Eisenhart の一定理のケーラー版、神戸研究集会、２０１７年７月１５日、神戸大学。
3. K. Kiyohara, A Kaehlerian analogue of a theorem of Levi-Civita,２０１７年１月８日、測地線と関連する諸問題、熊本大学。
4. K. Kiyohara, The cut locus of Liouville surfaces and manifolds, The Cut Locus, August 3-6, 2016, King Mongkut's Institute of Technology, Bangkok, Thailand.
5. 清原一吉、楕円体の共役跡の特異点、沼津研究会、２０１６年３月７日、沼津高専。
6. 清原一吉、リウヴィル多様体上のヤコビ場について、２０１５年１月１０日、測地線及び関連する諸問題、熊本大学。
7. 清原一吉、楕円体上の共役跡上に現れる特異点について、２０１４年１０月９日、広島幾何学研究会、広島大学。
8. 清原一吉、楕円体上の共役跡と D4+ラグランジュ特異点、２０１４年９月２５日、日本数学会、広島大学。

〔図書〕（計　0 件）

〔産業財産権〕

○出願状況（計　0 件）

名称：

発明者：
権利者：
種類：
番号：
出願年月日：
国内外の別：

○取得状況（計　0 件）

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
取得年月日：
国内外の別：

〔その他〕
ホームページ等

６．研究組織
(1)研究代表者
　清原　一吉（KIYOHARA，Kazuyoshi）
　岡山大学・大学院自然科学研究科・教授
　研究者番号：80153245

(2)研究分担者
　伊藤　仁一（ITOH, Jin-ichi）
　椙山女子学園大学・教育学部・教授
　研究者番号：20193493

(3)連携研究者
　（　　）

　研究者番号：

(4)研究協力者
　（　　）