

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 29 年 6 月 13 日現在

機関番号：22604

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2014～2016

課題番号：26400073

研究課題名(和文)特殊ラグランジュ部分多様体とその特異点の研究

研究課題名(英文)Research on special Lagrangian submanifolds and their singularities

研究代表者

酒井 高司 (SAKAI, Takashi)

首都大学東京・理工学研究科・准教授

研究者番号：30381445

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,300,000円

研究成果の概要(和文)：本研究課題ではLie群の作用による対称性を利用し，Riemann多様体内の部分多様体の幾何学的変分問題に関する研究を行った。

複素旗様体において互いに合同とは限らない二つの実旗多様体のLagrange交叉を考え，離散的である場合の交叉の対蹠性を示した。また，可換なHermann作用について，軌道が二重調和部分多様体になるための必要十分条件を対称三対を用いて与えた。この判定法により，既約コンパクト型対称空間への可換なHermann作用の軌道の二重調和性を調べ，コンパクト対称空間内の二重調和等質部分多様体の構成及びいくつかの分類結果を得た。

研究成果の概要(英文)：In this research project, we studied variational problems for submanifolds in Riemannian manifolds using Lie group actions.

We studied the Lagrangian intersection of two real flag manifolds in a complex flag manifold. Then we showed that the intersection is an antipodal set of a complex flag manifold, if the intersection is discrete. We also studied biharmonic submanifolds in compact symmetric spaces. We gave a necessary and sufficient condition for orbits of commutative Hermann actions to be biharmonic in terms of symmetric triad with multiplicities. By this criterion, we constructed a great many examples of proper biharmonic homogeneous submanifolds in compact symmetric spaces, moreover we obtain some classifications.

研究分野：微分幾何

キーワード：Lagrange部分多様体 極小部分多様体 対称空間 等質空間

1. 研究開始当初の背景

対称空間でない既約で単連結な Riemann 多様体は、そのホロノミー群により 7 種類に分類され、特殊なホロノミー群として $SU(n)$, $Sp(n)$, $Sp(n)Sp(1)$, G_2 , $Spin(7)$ の 5 つが存在する。特に、ホロノミー群が特殊ユニタリ群 $SU(n)$ の部分群になる Kähler 多様体をここでは広い意味で Calabi-Yau 多様体と呼ぶ。Calabi-Yau 多様体は Ricci 平坦な Kähler-Einstein 多様体になることから、微分幾何、代数幾何、複素幾何、シンプレクティック幾何さらには数理物理においても重要な対象として興味を持たれており、様々な観点から研究が進められている。

Harvey と Lawson はキャリプレーションを利用してホモロジー体積最小性をもつ部分多様体を構成する方法を与え、特殊ホロノミー群をもつ Riemann 多様体において、ホモロジー類内で体積最小となる部分多様体の例を数多く与えた。特に、複素 n 次元 Calabi-Yau 多様体の場合、複素体積形式の実部をとる n 次形式がキャリプレーションになり、これによってキャリプレートされる部分多様体を特殊 Lagrange 部分多様体と呼ぶ。Strominger-Yau-Zaslow は複素 3 次元 Calabi-Yau 多様体間のミラー対称性は特殊 Lagrange トーラスファイブレーションの双対として幾何学的に解釈できると予想した。この SYZ 予想により、ミラー対称性との関係から特殊 Lagrange 部分多様体が注目されており、活発に研究が進められている。SYZ 予想において困難な点は、この特殊 Lagrange トーラスファイブレーションには一般には特異点をもつファイバーが現れるということである。このため特殊 Lagrange 部分多様体上に現れる特異点を理解することが重要な課題となる。

2. 研究の目的

本研究課題では Lie 群の作用による対称性を利用して、Riemann 多様体内の部分多様体の幾何学的変分問題に関する研究に取り組んだ。特に、特殊ホロノミー群をもつ Riemann 多様体のキャリプレート部分多様体に関する研究を行った。Calabi-Yau 多様体において、特殊 Lagrange 部分多様体の幾何学的性質と特異点の様子を調べることを目的とした。キャリプレート部分多様体上には様々な種類の特異点が現れることが知られているが、これらの特異点の幾何学的様相を調べ、変形による特異点の解消について議論した。

また、より一般に Ricci 平坦とは限らない等質 Kähler 多様体において、実形の Lagrange 交叉の構造に関して研究を行った。実形の交叉の対蹠性を利用して、二つの実形の組に対して定まる Lagrangian Floer ホモロジーを求めることを目指した。

特殊 Lagrange 部分多様体は極小部分多様体であるので、その包含写像は調和写像である。調和写像の拡張概念として二重調和写像

が定義される。本研究課題ではコンパクト対称空間内の二重調和部分多様体に関する研究を行った。

3. 研究の方法

(1) 特殊 Lagrange 部分多様体の特異点の研究

多様体に大きな群作用があるとき、その対称性を利用して幾何的な微分方程式を常微分方程式に帰着させて解く手法が有効である。特殊 Lagrange 部分多様体を構成する場合には運動量写像の逆像の軌道空間上で定義された常微分方程式を解くことになる。このとき特異軌道が存在すると、そこが特異点として現れる。余等質性 1 の特殊 Lagrange 部分多様体の 1 パラメータ族を構成することにより、これらの特異点を滑らかに変形することができる。この運動量写像を用いた余等質性 1 の手法をより一般の場合に適用できるよう確立することを目指した。

Calabi-Yau 多様体の他にも、特殊ホロノミー群をもつ Riemann 多様体として超 Kähler 多様体の特殊 Lagrange 部分多様体 \mathcal{L}_2 多様体の associative 部分多様体および coassociative 部分多様体、 $Spin(7)$ 多様体の Cayley 部分多様体といったキャリプレート部分多様体が考えられる。運動量写像を用いる方法や余法束の方法などの手法を用いて、これらのキャリプレート部分多様体の研究を行うことを目指した。

(2) 複素旗多様体内の実形の交叉の構造

連結コンパクト Lie 群 G の随伴軌道は G 不変な Kähler 構造をもち、複素旗多様体と呼ばれる。対称空間の線形イソトローピー表現の軌道は実旗多様体と呼ばれ、複素旗多様体に全測地的 Lagrange 部分多様体として埋め込まれる。田中・田崎は Hermite 対称空間の実形の交叉は、Chen-Nagano によって定義された対蹠集合の構造をもつことを示した。本研究課題では対称対の制限ルート系、およびその一般化となる対称三対を用いて、複素旗多様体内の実旗多様体の交叉の対蹠性について研究を行った。さらに、実形の交叉の対蹠性に着目し、実形の組に対して定まる Lagrange Floer ホモロジーを調べた。

(3) コンパクト対称空間内の二重調和部分多様体

Eells-Lemaire は調和写像の一つの拡張として二重調和写像の概念を導入した。これは Riemann 多様体間の写像に対して定まる二重エネルギー汎関数の臨界点となるものとして定義される。Euclid 空間内の二重調和部分多様体は調和になるであろうという B.-Y. Chen 予想が盛んに研究され、これを非正曲率空間への二重調和写像に拡張した一般化された B.-Y. Chen 予想も議論されている。一方で、非負曲率をもつ Riemann 多様体への二重調和写像の研究は状況が大きく異なる。実

際，球面内には極小でない二重調和部分多様体の例が知られている．本研究課題では，Hermann 作用とそれに付随する Lie 群作用を用いて，コンパクト対称空間内の二重調和部分多様体について研究を行った．

4. 研究成果

(1) 複素旗多様体の実形の交叉の対蹠性

複素旗多様体は Hermitic 対称空間になるとは限らないが，一般化された k 対称空間の構造を用いて対蹠集合を定義することができる．我々は，複素旗多様体に対して，イソトロピー部分群のあるトーラス部分群の作用によって対蹠集合の特徴付けを行い，対蹠集合を再定義した．特にコンパクト型 Hermitic 対称空間の場合，これは Chen-Nagano により与えられた対蹠集合に一致する．複素旗多様体において互いに合同とは限らない二つの実旗多様体の交叉を考え，離散的であるならば交叉は複素旗多様体の対蹠集合になることを示した．特に，実旗多様体を定める二つの対合が可換である場合は，交叉が離散的になるための必要十分条件を対称三対を用いて与えることができる．このとき，離散的な交叉は対称三対のある種の Weyl 群の軌道になることを示した．これらの結果は井川治氏（京都工芸繊維大学），入江博氏（茨城大学），奥田隆幸氏（広島大学），田崎博之氏（筑波大学）との共同研究で得られた．

(2) コンパクト対称空間内の二重調和部分多様体

Riemann 多様体において平均曲率ベクトル場が平行であるような部分多様体について，二重調和になるための必要十分条件を与えた．コンパクト Lie 群 G に対して二つの対称部分群 K と H を考える．このとき，コンパクト対称空間 G/K への H の等長的な作用は Hermann 作用と呼ばれる．コンパクト対称空間への Hermann 作用の軌道は平均曲率ベクトル場が平行になることが知られている．我々は可換な Hermann 作用の軌道の第二基本形式を記述することにより，これらの軌道が二重調和になるための必要十分条件を重複度付き対称三対を用いて表した．この判定法を用いて，既約コンパクト型対称空間への可換な Hermann 作用の軌道の二重調和性を調べ，二重調和等質超曲面となる軌道の分類を与えた．さらに，対称三対の型と重複度の分類をもとに，既約なコンパクト型対称空間への余等質性 2 の可換な Hermann 作用の軌道の中で二重調和になるものを分類した．これにより，コンパクト対称空間内において余次元の高い二重調和等質部分多様体の例が数多く得られた．特に，コンパクト型 Hermitic 対称空間において二重調和な等質 Lagrange 部分多様体を構成した．さらに，可換な Hermann 作用に付随して定まる，コンパクト Lie 群 G への $H \times K$ の両側からの作用についても，軌道の第二基本形式を重複度付き対称三対を用

いて記述することができる．これにより，コンパクト単純 Lie 群 G において $H \times K$ の作用の軌道の二重調和性を調べ，二重調和等質超曲面となる軌道の分類を与えた．これらの結果は大野晋司氏（大阪市立大学），浦川肇氏（東北大学）との共同研究による．

5. 主な発表論文等

[雑誌論文](計4件)

Shinji Ohno, Takashi Sakai and Hajime Urakawa, Rigidity of transversally biharmonic maps between foliated Riemannian manifolds, to appear in Hokkaido Mathematical Journal. (査読有)

Shinji Ohno, Takashi Sakai and Hajime Urakawa, Biharmonic homogeneous submanifolds in compact symmetric spaces, to appear in Springer Proceedings in Mathematics & Statistics, The 20th International Workshop on "Hermitian Symmetric Spaces and Submanifolds", Daegu, Korea, 2016. (査読有)

Shinji Ohno, Takashi Sakai and Hajime Urakawa, Biharmonic homogeneous hypersurfaces in compact symmetric spaces, Differential Geom. Appl. **43** (2015), 155–179. (査読有)

Hiroshi Iriyeh, Takashi Sakai and Hiroyuki Tasaki, Lagrangian intersection theory and Hamiltonian volume minimizing problem, Springer Proceedings in Mathematics & Statistics, ICM Satellite Conference on "Real and Complex Submanifolds", Daejeon, Korea, (2014), 391–399. (査読有)

[学会発表](計16件)

Takashi Sakai, The intersection of two real flag manifolds in a complex flag manifold, The First Japan-Taiwan Joint Conference on Differential Geometry & the 8th TIMS-OCAMI-WASEDA Joint International Workshop on Differential Geometry and Geometric Analysis, Waseda University, December 13–December 17, 2016.

大野晋司，酒井高司，浦川肇「コンパクト Lie 群内の二重調和等質超曲面の構成」日本数学会 2016 年度秋季総合分科会，関西大学，2016 年 9 月 15 日–9 月 18 日

Shinji Ohno, Takashi Sakai and Hajime Urakawa, Biharmonic homogeneous submanifolds in compact symmetric spaces, The 20th International Workshop on "Hermitian Symmetric Spaces and Submanifolds", Kyungpook National University, Daegu, Korea, July 26 July 30, 2016.

Takashi Sakai, Biharmonic homogeneous submanifolds in compact symmetric spaces, The 11th OCAMI-RIRC Joint Differential Geometry Workshop on "Submanifolds and Lie Theory", Osaka City University, March 20 March 23, 2016.

大野晋司, 酒井高司, 浦川肇, 「コンパクト対称空間内の二重調和等質部分多様体の構成」日本数学会 2016 年度年会, 筑波大学, 2016 年 3 月 16 日 3 月 19 日

酒井高司 「ラグランジュ交叉と対蹠集合」Aspects of Differential Geometry, 東北大学, 2016 年 3 月 9 日 3 月 10 日

酒井高司 「The intersection of two real flag manifolds in a complex flag manifold」第 42 回変換群論シンポジウム, 金沢勤労者プラザ, 2015 年 11 月 26 日--2015 年 11 月 28 日

Osamu Ikawa, Hiroshi Iriyeh, Takayuki Okuda, Takashi Sakai and Hiroyuki Tasaki, Antipodal structure of the intersection of real flag manifolds in a complex flag manifold II, The 19th International Workshop on "Hermitian-Grassmannian Submanifolds and Its Applications", National Institute for Mathematical Sciences, Daejeon, Korea, October 26 October 28, 2015.

大野晋司, 酒井高司, 浦川肇, 「コンパクト対称空間内の二重調和超曲面」日本数学会 2015 年度秋季総合分科会, 京都産業大学, 2015 年 9 月 13 日 9 月 16 日

井川治, 入江博, 奥田隆幸, 酒井高司, 田崎博之「複素旗多様体内の二つの実旗多様体の交叉」日本数学会 2015 年度年会, 明治大学, 2015 年 3 月 21 日 3 月 24 日

Shinji Ohno and Takashi Sakai, Area-minimizing cones over minimal

embeddings of R-spaces, The 9th OCAMI-KNUHGRG Joint Differential Geometry Workshop on "Submanifold Geometry and Lie Theory", Osaka City University, February 12 February 14, 2015.

酒井高司 「複素旗多様体内の二つの実形の交叉」福岡大学微分幾何研究会, 福岡大学, 2014 年 10 月 31 日 11 月 3 日

入江博, 酒井高司, 田崎博之「複素旗多様体内の四元数旗多様体の交叉の構造」日本数学会 2014 年度秋季総合分科会, 広島大学, 2014 年 9 月 25 日 9 月 28 日

酒井高司 「複素旗多様体内の四元数旗多様体の交叉の構造」部分多様体幾何とリ一群作用 2014, 東京理科大学, 2014 年 9 月 5 日 9 月 6 日

酒井高司 「複素旗多様体内の実旗多様体の交叉の構造」第 61 回幾何学シンポジウム, 名城大学, 2014 年 8 月 23 日 8 月 26 日

Hiroshi Iriyeh, Takashi Sakai and Hiroyuki Tasaki, Lagrangian intersection theory and Hamiltonian volume minimizing problem, ICM Satellite Conference on "Real and Complex Submanifolds", National Institute for Mathematical Sciences, Daejeon, Korea, August 10 August 12, 2014.

〔その他〕

ホームページ等

<http://www.comp.tmu.ac.jp/tsakai/>

6. 研究組織

(1) 研究代表者

酒井 高司 (SAKAI, Takashi)

首都大学東京・理工学研究科・准教授

研究者番号: 30381445

(2) 連携研究者

大仁田 義裕 (OHNITA, Yoshihiro)

大阪市立大学・理学研究科・教授

研究者番号: 90183764

赤穂 まなぶ (AKAHO, Manabu)

首都大学東京・理工学研究科・准教授

研究者番号: 30332935