様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９－１、Ｚ－１９　（共通）

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 ２９ 年　 ６ 月　 ９ 日現在

機関番号：３２６８２
研究種目：基盤研究(C)（一般）
研究期間：2014～2016
課題番号：２６４０００７４

研究課題名（和文）ベクトル束と調和写像のADHM構成法

研究課題名（英文）ADHM-construction of vector bundles and harmonic maps

研究代表者
長友　康行（NAGATOMO, yasuyuki）

明治大学・理工学部・教授

研究者番号：１０２６６０７５

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　3,700,000円

研究成果の概要（和文）：グラスマン多様体への調和写像に関する一般化されたdo Carmo-Wallch理論のさらなる一般化を定義域がコンパクトリーマン多様体の場合に達成できた。これにより、インスタントンのADHM構成法と類似の調和写像のモジュライ空間の記述が可能となった。
　例として、複素射影直線から複素射影空間の複素２次超曲面への正則等長写像のモジュライを記述できた。さらに、モジュライが葉層構造を持つことが示され、その葉体はケーラー商で与えられる。
　また、複素射影直線から２次元部分空間のなす複素グラスマン多様体への正則同変写像の分類にも成功した。いずれの場合もモジュライのコンパクト化には幾何学的な解釈が与えられる。

研究成果の概要（英文）：A generalisation of do Carmo-Wallach theory on harmonic maps into Grassmannians is more extended in the case that the domain of maps are compact Riemannian manifolds.
This theory enables us to construct moduli spaces of harmonic maps in a similar way to the ADHM-construction of instantons on the 4-sphere.
This theory has a lot of applications. As one of them, we can construct moduli spaces of holomorphic isometric embeddings of the complex projective line into a complex quadric hypersurface of the projective space. Due to this, it turned out that the moduli space has a structure of foliation whose leaves are Kaehler quotients of flat spaces.
As another example, we can classify equivariant holomorphic maps of complex projective line into complex Grassmannian of 2-planes. In this case, our problem reduces to classify invariant connections on vector bundles of rank 2. In each case, our theory provides the compactification of the moduli space with a natural geomertic interpretation.

研究分野：微分幾何学

キーワード：ベクトル束　ゲージ理論　調和写像　正則写像　モジュライ空間　表現論

１．　研究開始当初の背景

（１）研究代表者により、リーマン多様体から球面への調和写像に対する定理である「高橋の定理」が、グラスマン多様体への調和写像に対する定理として拡張されていた。
（２）「高橋の定理」を用いて、do Carmo と Wallach は球面から球面への極小はめ込みの分類に成功していたが（do Carmo-Wallach 理論）、この理論も研究代表者により、リーマン等質空間からグラスマン多様体への調和写像の分類定理として拡張されていた。ただし、「高橋の定理」の一般化においても、do Carmo-Wallach 理論の拡張においても、ともにベクトル束とその接続の役割が重要であった。

２．　研究の目的

上記（１）と（２）を比較してみれば、（１）では定義域が一般のリーマン多様体であるのに対して、（２）では定義域がリーマン等質空間に限られている。そこで、まずは、do Carmo-Wallch 理論がどこまで拡張可能かを見極めることが研究の大きな目標となった。また、拡張された理論が有効であることを確かめるために、多くの具体例で興味ある結果を引き出すことが目的となった。

３．　研究の方法

オリジナルな形での「高橋の定理」や do Carmo-Wallach 理論では、接束、法束とリーマン接続以外のベクトル束やその上の接続の役割は前面に現れていない。ところが研究代表者によるその一般化では、グラスマン多様体上で自然に出現するベクトル束とその接続を利用するので、若干趣が異なっている。写像の理論にベクトル束とその接続を用いることに、本研究の最大の特長があり、また困難さがある。そこで、具体例を中心に研究し、見出すべき理論を形成していかねばならない。
（１）このような状況であったので、多くの研究者との交流が不可欠であると考えた。とくに問題を以前から共同で追及してきた、連携研究者の高橋正郎氏や古賀勇氏との議論が非常に重要であった。
（２） 研究成果を発表し、さまざまな分野の研究者との議論の機会を増やすことも重要であった。特に海外の研究者に触発されたアイディアが本研究には多いことから、引き続き海外の研究者と直接的、間接的に議論していくことも重要であった。

４．　研究成果

（１）拡張された do Carmo-Wallch 理論のさらなる一般化、すなわち定義域が一般のコンパクトリーマン多様体である場合の定式化を与え、これを証明することができた。この一般化では、ケーラー多様体から複素グラスマン多様体への正則写像の場合には、得られた方程式はゲージ群の作用に対する運動量写像として説明できることも解明できた。また、研究代表者の導入したグラスマン多様体への写像に対するゲージ同値性によるモジュライ空間の記述が拡張された do Carmo-Wallach 理論の帰結であるが、ホロノミー群内における中心化群の作用を考慮すれば、先行研究で用いられてきた像同値性によるモジュライ空間の記述も可能であることがわかった。
（２）（１）の具体的成果として、複素射影直線から複素射影空間内の複素２次超曲面への正則等長写像の像同値性によるモジュライ空間の記述が得られた。ゲージ同値性によるモジュライ空間はケーラー構造を持っていたが、ホロノミー群の中心化群はそのモジュライ空間にケーラー構造を保つように作用しており、その作用による商空間が像同値性によるモジュライ空間となるのである。その結果、運動量写像によるケーラー商を利用することにより、像同値性によるモジュライ空間はケーラー部分多様体による葉層構造をもつことが解明できた。この葉層構造の存在を指摘できたことは、この理論の強みであると思われる。
（３）複素射影直線から複素ベクトル空間内の２次元部分空間からなる複素グラスマン多様体への同変正則写像の分類問題を研究した。この問題は、写像の同変性という性質から、ある条件を満たす群の軌道の分類に帰着されるので、この観点から、すでにいくつかの先行研究が存在していた。しかしグラスマン多様体の次元が高い場合には、組み合わせの問題が複雑になり、分類が完成されていなかったのである。そこで、ベクトル束に注目し、複素射影直線上の階数２のベクトル束の不変接続の分類に問題を帰着させることに成功した。この不変接続の分類では層の理論が有効に使われる。その結果、不変接続のゲージ同値類は０以上の実数全体と同一視できることが証明された。この中で、正則写像によって誘導される不変接続を決定することが次の課題となった。このとき、正則写像の場合には、研究代表者の定義した平均曲率作用素が、正則ベクトル束の平均曲率作用素と一致し、したがって、曲率を計算することによって求められることがわかる。すると平均曲率作用素が非正の対称作用素であることから、写像によって誘導される不変接続に対する必要条件が得られる。これが十分条件であることを示すことに成功した。そのモジュライ空間はある層係数コホモロジー群のトーラス作用による商空間とみなせるので、L2 内積により自然なトポロジーが導入される。そこで、モジュライ空間のコンパクト化を考察すると、「直和型」と「退化型」の写像が得られることも理解できた。
（４）複素射影空間内の複素超曲面の内、複素射影空間のキリングベクトル場の制限が

またその超曲面のキリングベクトル場になるような超曲面を求める問題を考察した。全測地的超曲面がこの性質を持つことは明らかであるが、それ以外にそのような超曲面が存在するのかどうかを決定することが問題となった。この問題も正則性を利用することにより、次数が２以下の超曲面を考察すればよいことがわかる。次数が１の場合は全測地的な場合なので、次数が２の場合が問題となる。この場合、誘導計量の完全な分類を得ることに成功した。その結果、ほとんどの誘導計量はキリングベクトル場を許容しないが、誘導計量のなす空間の境界に現れる計量はキリングベクトル場を許容するという結果を得た。

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計　4　件）
①O.Macia, Y.Nagatomo, and M.Takahashi, Holomorphic Isometric Embeddings of the Projective line into Quadric, to appear in Tohoku Mathematical Journal

②I.Koga and Y.Nagatomo,
A study of Submanifolds of the Complex Grassmannian Manifold with Parallel Second Fundamental Form, Tokyo Journal of Mathematics, 39, (2016), 173-185

③A.Gambioli, Y.Nagatomo and S.Salamon,
Special geometries associated to quaternion-Kaehler 8-manifolds,
Journal of Geometry and Physics, 91, (2015), 146-162

④Y.Nagatomo,
Harmonic maps into Grassmannians,
Springer Proceedings in Mathematics and Statics 106, Real and Complex Submanifolds, (2014), 453-463, Springer

〔学会発表〕（計　6　件）
①Y.Nagatomo
Harmonic maps of the complex projective line to complex hyperquadrics, 13th OCAMI-RIRCM Joint DG workshop on Submanifold Geometry and Lie Theory, 2016.3.27-3.30, 大阪市立大学（大阪府・住吉区）

②古賀勇（発表者）、長友康行
複素射影直線から階数２の複素グラスマン多様体への同変正則埋め込みの分類、
日本数学会　幾何学分科会　一般講演,
2015.3.24-3.27、首都大学東京（東京都・八王子市）

③長友康行
複素射影直線から複素２次超曲面への調和写像,
多様体上の微分方程式,
2015.11.12-11.14、金沢大学サテライトプラザ（石川県・金沢市）

④O.Macia, 長友康行、高橋正郎（発表者）
複素射影直線から複素２次超曲面への正則等長埋め込み、
日本数学会　幾何学分科会　一般講演,
2015.3.21-3.24、明治大学（東京都・千代田区）

⑤長友康行、
複素射影直線から複素 2 次超曲面への正則等長埋め込み、
部分多様体幾何とリー群作用 2014、
2014.9.5-6、東京理科大学森戸記念館（東京都・新宿区）

⑥Y.Nagatomo
Harmonic maps into Grassmannians,
ICM 2014 Satellite Conference on Real and Complex Submanifolds and the 18th International Workshop on Differential Geometry,
2014.8.10-12, National Institute for Mathematical Sciences , Daejeon(Korea)

〔図書〕（計　0　件）

〔産業財産権〕

○出願状況（計　0　件）

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
出願年月日：
国内外の別：

○取得状況（計　0　件）

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
取得年月日：
国内外の別：

〔その他〕
ホームページ等

６．研究組織
(1)研究代表者

長友　康行（NAGATOMO, Yasuyuki）
明治大学・理工学部・教授
研究者番号：10266075

(2)研究分担者
　　　　　　　(　　　)

研究者番号：

(3)連携研究者
高橋　正郎（TAKAHASHI, masaro）
久留米工業高等専門学校・一般科目理科系・准教授
研究者番号：70311107

(4)研究協力者
古賀勇（KOGA, Isami）
九州大学大学院・数理学府・博士研究員
研究者番号：60782232

Oscar Macia,
University of Valenncia, Faculty of Mathematical Science, **Profesor ayudante doctor**