様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９－１、Ｚ－１９　（共通）

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 ３０ 年　 ６ 月 １３ 日現在

機関番号：３７１１１
研究種目：基盤研究(C)（一般）
研究期間：2014～2017
課題番号：２６４０００７６

研究課題名（和文）共形平坦な超曲面の双対性と変換の研究

研究課題名（英文）Research for duality and transformations of generic conformally flat hypersurfaces.

研究代表者
陶山　芳彦（SUYAMA, YOSHIHIKO）

福岡大学・理学部・非常勤講師

研究者番号：７００２８２２３

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　3,600,000円

研究成果の概要（和文）：「genericで共形平坦な超曲面」(GC-超曲面)の全体からなる空間に関して研究した。GC-超曲面と「Guichard 条件を満たす共形平坦な3次元計量」(GC-3次元計量)とは、一対一に対応する。従って、GC-超曲面の空間を調べるためには、GC-3次元計量の空間を調べれば良い。この研究で得た最も重要な結果は次の通り：各GC-3次元計量に対して、定曲率 -1の2次元計量の発展が定まる。逆に、定曲率 -1を持つ解析的な2次元計量から成るあるクラスが存在し、このクラスに属する2次元計量に対しては、その計量を始点とする2次元計量の発展が定まって、その発展がGC-3次元計量を定める。

研究成果の概要（英文）：There is a canonical one-to-one correspondence between generic conformally flat (local-)hypersurfaces and conformally flat 3-metrics with the Guichard condition. We have studied the space of conformally flat 3-metric with the Guichard condition. The most important result in this study is as follows: for a conformally flat 3-metric with the Guichard condition in the interior of the space, an evolution of orthogonal (local-)Riemannian 2-metrics with constant Gauss curvature -1 is determined; for a 2-metric belonging to a certain class of orthogonal analytic 2-metrics with constant Gauss curvature -1, a one-parameter family of conformally flat 3-metrics with the Guichard condition is determined as evolutions issuing from the 2-metric.

研究分野：微分幾何学

キーワード：conformally flat　Guichard net　duality　conformally invariant　constant Gauss curvature　hypersurfaces　evolution equation

1．研究開始当初の背景

本研究代表者は、当該科研費研究を開始する 15 年以上も前から、4 次元空間形内の generic で共形平坦な超曲面の研究を続けていた。そのうちの 10 年間は海外共同研究者であるウィーン工科大学の Hertrich-Jeromin 氏と共同研究を行い、また、直近の 3-4 年は彼に加えて、曲面論の専門家である東京工業大学の梅原雅顕・山田光太郎両氏とも共同研究を行っていた。そして、これらの研究で着実に成果を上げて来ていた。

特に、本科研費研究を開始する直近の 3-4 年の共同研究において、共形平坦な超曲面の研究が新たなステージに入ったと思われるような成果を得ていたので、その成果を基にした今回の科研費研究では目覚ましい成果を上げる事ができた。

この欄では、本科研費研究開始以前に得ていた結果を、共形平坦な超曲面研究の学術的背景を込めて、記述する。

共形平坦な超曲面の研究は、E. Cartan の 1917 年の論文を起源としている。この論文における Cartan の主結果は、「ユークリッド空間内の 4 次元以上の超曲面が共形的に平坦であるための必要十分条件は、それが channel hypersurface となることである。」という定理である。ここで channel hypersurface とは、超曲面の次元を n とする時、1 つの主曲率だけが異なり他の(n-1)個の主曲率は一致するような超曲面を指す。

3 次元の超曲面の場合でも、channel hypersurface は共形的に平坦となるが、この 3 次元の場合だけは 3 つの主曲率が各点で全て異なるような(この性質を generic という)共形平坦な超曲面が存在する可能性が残った。この 3 次元超曲面の分類問題は今でも open problem であり、本研究の究極の研究目標である。そして、この問題についても今回の研究である意味での解答を得ている。

Cartan はまた、generic で共形平坦な超曲面が存在する場合に「3 つの主曲率の間に成り立つ関係式」も得ている。しかし、このような超曲面が実際に存在するかどうか、また Cartan の与えた主曲率の関係式が幾何学的に何を意味するのかは長い間分かっていなかった。

generic で共形平坦な超曲面の最初の例は 1980 年代の終わりに、J. Lafontaine によって与えられたが、その構成は generic で共形平坦な超曲面の一般的な理論(或いは、構成法)に繋がるものではなかった。

共同研究者 Hertrich-Jeromin は 1990 年代の半ばに、Cartan の与えた「主曲率の間の関係式」は超曲面の「(曲率線からなる)座標系によって特別な形に表される共形平坦な 3 次元計量」の存在と同値である事を示した。このような共形平坦な 3 次元計量とその計量を表現する座標系とを合わせて Guichard net という。

本代表者は Guichard net を使い、2004 年に出版した 2 つの論文で、ある種の generic で共形平坦な超曲面の構成とその部分的な分類を行ったが、これは非自明な generic で共形平坦な超曲面の初めての具体例を与えたものである。この後、代表者と Hertrich-Jeromin との共同研究が始まり、2007 年の共著の論文で本代表者が構成した超曲面を、幾何的性質により、完全に分類した。

以上の学術的背景を準備として、その後の研究で本科研費研究開始以前に代表者が共同研究者と共に得ていた結果を記述する:

(1) 以前に見つけたものとは別種の Guichard net を発見し、そのような Guichard net の幾何学的性質による特徴付けを行った。

(2) 空間形内の generic で共形平坦な超曲面は随伴超曲面（generic で共形平坦な超曲面の非自明な 1 変数変形族）を持つ事を発見した。このとき、1つの随伴族に属する全ての超曲面は同じ Guichard net を持つ。

(3) ユークリッド空間の generic で共形平坦な超曲面に対して、その双対となる generic で共形平坦な超曲面が存在することを発見した。これは**雑誌論文**の欄の③に上げた 4 名; U. Hertrich-Jeromin, Y. Suyama, M. Umehara, K. Yamada の共著論文③の結果である。また、この論文では双対超曲面の積分公式「双対超曲面の全微分は最初の超曲面の全微分とその Schouten tensor との結合積によって表せる」や、双対超曲面の存在によって定義される generic で共形平坦な超曲面の間の様々な変換も定義している。

特に、1 つの generic で共形平坦な超曲面の随伴族に Groursat 型変換ー反転を作用させてその後で双対を取るーを作用させることにより、5 次元分の双対超曲面が構成される事や、更に、反転の中心を変えながら Groursat 型変換を繰り返し作用させることにより、1 つの共形平坦な超曲面から無限に多くの(共形的に異なる)高次双対超曲面が構成されること等を発見した。

2．研究の目的

本研究では、上に記した結果(1), (2), (3) を基に、generic で共形平坦な超曲面の研究を更に発展させることを目的とした。下に本科研費研究開始時の具体的な研究目標を記したが、これらの項目は互いに関連していて、今振り返って見ても共形平坦な超曲面の研究における本質的な研究課題であった。このため、今回の研究で画期的な成果を上げることができたのだと考えている。

(1) 共形平坦な超曲面と Guichard net は(正規的な対応によって)1 対 1 に対応する。従って、超曲面の双対 pair には Guichard net の双対 pair（Ribaucour pair）が対応する。１つの Guichard net からその Ribaucour 対を構成する方法を研究する。

(2) １つの共形平坦な超曲面から Goursat 型変換を繰り返し行うことにより、次々と新しい共形平坦な超曲面が構成されるが、このようにして作られる高次の双対超曲面は、直接的には、最初の超曲面の幾何学的特徴は持たない。このように無限に存在する「共形平坦な超曲面の分類とは何を行えば良いか。」という問題について研究する。
(3) 双対超曲面の積分公式により、双対 pair で対応する曲率線方向は平行となる事は分かるが、それ以上の双対 pair の間の関係はわかっていなかった。そこで、双対 pair の間の幾何学的或いは解析的関係を明らかにする研究を行う。

３．研究の方法

本研究４年間のうちの最初の期間は、ほぼ**研究目的**の欄に記した項目毎に研究を行っていた。それぞれの項目に関して研究を行う中で、これらの項目に明確な関係があることがわかり、後半の研究ではこれらの項目を総合する立場から研究を行った。その明確な関係とは、ユークリッド空間内の超曲面が全ての研究の鍵になるということであった。

その結果、generic で共形平坦な超曲面の研究を本質的に進展させることができた。この結果の一部は、**雑誌論文**の欄の①と②に発表したが、その後の進展も論文として発表するべく準備を進めている。

本研究代表者は、generic で共形平坦な超曲面の研究に関しては世界で最先端の研究を行っている。数学の研究の評価は、当然のことではあるが、その研究が優れた研究であるかどうかで判断される。優れた研究であるかどうかは、研究の重要性・独創性・研究の深さと美しさ・他の数学との関連性(普遍性)等の判断要素がある。このため、研究に際してはできるだけ多角的な観点から課題を見つけて研究を推進する事が望ましい。このことが本研究代表者がこれまで個人研究ではなく共同研究を行ってきた理由である。

また、数学会やシンポジウム・研究会・学内幾何セミナー等に出席して他の専門の講演をも見聞きし、更に積極的に討論に参加して、本研究が現代数学の潮流と懸け離れたものにならないように、他の専門家にも impact を与えるものになるよう努力した。最近ではこれらの努力が認められ、有名雑誌からも査読の依頼が来るようになった。

しかし、これまでの共同研究を通して個人で研究を進めることの重要性も知ったので、今後は個人研究をしていくつもりである。

４．研究成果

雑誌論文における**論文③の内容**に関しては、**研究開始当初の背景**の欄の(3)で記した。そして、この論文の結果が本科研費研究の出発点であった。

論文②の内容に関して： 空間形内の generic で共形平坦な超曲面の存在問題は、Guichard net の存在と同値であることは前に述べた。しかし、実際にユークリッド空間内に埋め込まれた超曲面の第一・第二基本形式を Guichard net から決定する方法はわかっていなかった。この論文ではこの問題を解決した： Guichard net に対応して存在することだけが知られていたユークリッド空間内の超曲面に関して、その超曲面のガウス・コッダチのデータを Guichard net から直接決定する方法を与えた。そして、**研究開始当初の背景**の欄の(1)の Guichard net に対して、これらのデータを実際に決定した。

更に、上のユークリッド空間内の超曲面の実現問題の応用として、Guichard net から、その net を持つ超曲面に対する双対超曲面の Guichard net、即ち、その Ribaucour 対の構成法を与えた。

論文①の内容に関して： Guichard net と定曲率-1 を持つ(局所的)2 次元リーマン計量のあるクラスとの間の 1 対 1 対応を与えた。これは、Cartan の 1917 年の論文以来の未解決問題に対して１つの解答を与えたものである： generic で共形平坦な超曲面の Guichard net に対しては、定曲率-1 を持つ 2 次元リーマン計量の発展が対応する。また逆に、定曲率-1 を持つ 2 次元リーマン計量のあるクラスに属する計量に対しては、その計量を初期値とする 2 次元リーマン計量の発展が存在して、その発展が Guichard net を定める。

更に、このときの定曲率-1 を持つ 2 次元リーマン計量のクラスの特徴づけを行った。

<u>上の結果の意義について</u>： 共形平坦な超曲面の存在は Guichard net の存在問題に帰着される。従って、Cartan の問題は Guichard 条件を満たす 3 次元の共形平坦計量の存在問題と同値となり、これは複雑な 3 階偏微分方程式の４連立方程式の一般解を求める問題となる。上の論文では、この問題を微分幾何学では最も基本的である定曲率-1 を持つ 2 次元リーマン計量の問題に帰着させたものであり、この結果は大変価値のあるものである。

現在論文として準備中の結果:

(1) 論文①は、generic で共形平坦な超曲面の 3 次元計量と定曲率-1 の 2 次元計量との対応を与えたものである。この結果を更に進めて、ユークリッド空間内の generic で共形平坦な超曲面それ自体とある曲面との対応も与えることができる。その曲面の発展から超曲面への対応を定めるのだが、詳しい事はここでは公表できない。

この結果は、「超曲面の問題を曲面論として捉えることができる」ということを意味し、これまた画期的な結果である。この結果を更に研究すれば、generic で共形平坦な超曲面の大域的研究を創始できるかもしれない。

(2) generic で共形平坦な超曲面に対し、反転不変量・双対不変量が定義できる。

これらの不変量を使って、高次双対超曲面に関しての漸化公式を導く事ができる。

(3) 超曲面の双対超曲面は積分公式で定義されるが、その積分を実際に解くことは難しい。従って、最初の超曲面と双対超曲面の幾何学的関係をよく理解する事は困難のように思われる。研究代表者は、双対超曲面を離散化して解くことによって、２つの超曲面の間にあるはっきりとした幾何学的関係を見つけている。

５．主な発表論文等

（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計３件）

① F.E.Burstall, U.Hertrich-Jeromin and Y.Suyama, Curvilinear coordinates on generic conformally flat hypersurfaces and constant curvature 2-metrics. J. Math. Soc. Japan, (査読有), Vol.70 (2018), 617-649.
DOI:10.2969/jmsj/07027420

② U. Hertrich-Jeromin, Y. Suyama, Ribaucour pairs corresponding to dual pairs of conformally flat hypersurfaces. Geometry and analysis on manifolds, 449-469, Progr. Math. (査読有), 308, Birkhauser/Springer, Cham, 2015.

③ U. Hertrich-Jeromin, Y. Suyama, M. Umehara, K. Yamada, A duality for conformally flat hypersurfaces. Beitr. Algebra Geom. (査読有), 56 (2015), no. 2, 655-676.
DOI:10.1007/s13366-014-0225-3

〔学会発表〕（計４件）

① 陶山芳彦、共形平坦な超曲面から決まる反転不変量と高次双対超曲面、小磯憲史先生退職記念研究集会、大阪大学、2017 年 3 月 13 日。

② Y.Suyama, Curvilinear coordinates on generic conformally flat hypersurfaces and constant curvature 2-metrics, Transformations and Singularities, 東京工大、 2016 年 2 月 19 日。

③ Y.Suyama, Space of generic conformally flat hypersurfaces II,
福岡大学微分幾何研究会（Geometry and Analysis)、福岡大学セミナーハウス、2015 年 11 月 1 日

④ Y.Suyama, The space consisting of generic conformally flat hypersurfaces I, 福岡大学微分幾何研究会（Geometry and Analysis)、福岡大学セミナーハウス、2014 年 11 月 2 日

６．研究組織

(1)研究代表者

陶山　芳彦（SUYAMA Yoshihiko）
福岡大学・理学部・非常勤講師
研究者番号：70028223