

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 30 年 5 月 15 日現在

機関番号：12612

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2014～2017

課題番号：26400083

研究課題名(和文)実特異点論の応用と正則写像のなす空間のホモトピー型の研究

研究課題名(英文)Applications of real singularity theory and the homotopy types of spaces of holomorphic maps

研究代表者

山口 耕平(YAMAGUCHI, Kohhei)

電気通信大学・大学院情報理工学研究科・教授

研究者番号：00175655

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,400,000円

研究成果の概要(和文)： X, Y は複素多様体または実代数多様体とするとき、 X, Y が複素多様体のときには、 X から Y への正則写像のなす空間を $\text{Hol}(X, Y)$ とおき、 X, Y が実代数多様体のときには、 X から Y への多項式で表現される代数的写像のなす空間を $\text{Alg}(X, Y)$ とおく。
このとき、本研究では、 X から Y への連続写像全体のなす無限次元空間 $\text{Map}(X, Y)$ を、その部分空間 $\text{Hol}(X, Y)$ または部分空間 $\text{Alg}(X, Y)$ でどの次元までそのホモトピー型を近似できるかを考察する問題(Atiyah-Jones-Segal予想)を考察する。とくに、G. Segalの有利関数の位相に関する結果の一般化も考察する。

研究成果の概要(英文)：For complex manifolds X and Y (resp. real algebraic varieties X and Y), let $\text{Hol}(X, Y)$ (resp. $\text{Alg}(X, Y)$) denote the space of holomorphic maps (resp. algebraic maps represented by polynomials) from X to Y . In this situation, we consider the inclusion map from $\text{Hol}(X, Y)$ or $\text{Alg}(X, Y)$ into the space $\text{Map}(X, Y)$ of all continuous maps from X to Y , and we would like to investigate what dimension this inclusion map approximates the infinite dimensional space $\text{Map}(X, Y)$. This problem is called the Atiyah-Jones-Segal conjecture. In particular, in this research we generalize the result of G. Segal concerning to the space of rational functions.

研究分野：幾何学(トポロジー)

キーワード：ホモトピー型 正則写像 複素多様体 実代数的多様体 トーリック多様体 終結式 手術 実特異点

1. 研究開始当初の背景

一般に、位相空間 X, Y に対して、 X から Y への連続写像 $f: X \rightarrow Y$ 全体のなす写像空間 $\text{Map}(X, Y)$ は無限次元位相空間であり巨大であるためそのホモトピー型を調べるのは困難である。そこで、位相空間 X, Y として、複素多様体 (complex manifold) または、実代数的多様体 (real algebraic variety) に制限して考えることとする。この場合には、 $\text{Map}(X, Y)$ には、これより十分小さな次のような部分空間が含まれている。例えば、 X, Y が複素多様体の場合には、 X から Y への正則写像全体のなす部分空間 $\text{Hol}(X, Y)$ が含まれる。同様に、 X, Y が実代数的多様体の場合は、 X から Y への (多項式で表現される) 代数的写像全体のなす部分空間 $\text{Alg}(X, Y)$ が含まれる。この場合、自然な発想として、包含写像 $i: \text{Hol}(X, Y) \rightarrow \text{Map}(X, Y)$ または、 $j: \text{Alg}(X, Y) \rightarrow \text{Map}(X, Y)$ を考えるとき、この写像によって、どの程度 (どの次元) まで $\text{Map}(X, Y)$ のホモトピー型が近似できるかを調べることを考える。例えば、 X がコンパクトリーマン面 (複素 1 次元多様体) で、 Y が対称性の高い複素多様体の場合は、この問題は、数理論理学のシグマモデルとも密接に関連し Atiyah-Jones-Segal 型予想問題と言われ重要であることが知られている。さらに、Gromov の提唱した H-原理ともこの問題は関連していることが知られている。以上が、本研究の研究当初の背景にある事実である。

2. 研究の目的

上記の理由により、以下 X, Y を複素多様体 または、 X, Y は実代数多様体とする。とくに、一番基本的な場合として、本研究では、 $X = \mathbb{R}P^m$ (m 次元実射影空間) または $X = \mathbb{C}P^m$ (m 次元複素射影空間) の場合を取り扱うこととする。

(i) $X = \mathbb{R}P^m$ のときには、 Y を実代数多様体として自然な包含写像 $j: \text{Alg}(\mathbb{R}P^m, Y) \rightarrow \text{Map}(\mathbb{R}P^m, Y)$ を考えると、うまく実代数多様体の構造を取り替えると写像 j はホモトピー同値であることが証明される。代数的写像全体の空間 $\text{Alg}(\mathbb{R}P^m, Y)$ は多項式の総次数から自然な filtration が入るので実特異点論の応用として得られる Vassiliev 型 spectral sequence を利用してこの場合に、Atiya-Jone-Segal 型予想が成り立つかを調べることを第 1 の主要目的とする。

(ii) $X = \mathbb{C}P^m$ のとき、 Y を複素多様体として自然な包含写像 $i: \text{Hol}(\mathbb{C}P^m, Y) \rightarrow \text{Map}(\mathbb{C}P^m, Y)$ を考える。このとき、(i) と同様にして、写像 i に対して、Atiya-Jone-Segal 型予想が成り立つかを調べることを第 2 の主要目的とする。

(iii) 最近、B.Farb-J.Wolfson 達の研究によって、 Y が適当な条件を満たす non-singular トーリック多様体 $Y =$ のときには、 $\text{Hol}(\mathbb{C}P^1, Y)$ に関連する、

Y に対応する扇 (fan) Σ から定まる resultant (一般化された集結式) の空間 $\text{Poly}(\Sigma)$ を考えると、この空間に対して、(ii) のある種の類似結果が成立することが予見される。この一般化を考えることを第 3 の目的とする。

3. 研究の方法

この研究課題の主要な問題は、代数的トポロジー (algebraic topology) に属する。しかし、問題となる空間 (図形) X や Y は、代数幾何学の圏に属するため、普通のトポロジーの道具は使いにくい欠点がある。そこで、本研究では主に、実特異点論ではよく知られた (Arnold によって導入された) simplicial resolution から導入される Vassiliev 型 spectral sequence を用いて対象となる空間のホモロジー群の計算を行う方法が主流になる。さらに、部分空間 $\text{Alg}(\mathbb{R}P^m, Y)$ や $\text{Hol}(\mathbb{C}P^m, Y)$ は、整数 m が小さいときは、ラベル付き配置空間 (labelled configuration space) と密接に関連するので、G. Segal によって開発された顕微鏡写像 (scanning map) も利用して上記問題 (i), (ii), (iii) を考察する事が、研究方法の概要である。

なお上記の Atiyah-Jones-Segal 予想に関する問題は、ラベル付き配置空間や代数幾何学と密接に関連するため、各研究分担者には以下の協力をお願いした。

- 代数的写像の空間 $\text{Alg}(X, Y)$ の位相は、ラベル付き配置空間の位相と密接に関連するので、島川教授にはそのサポートをお願いした。
- 正則写像の空間 $\text{Hol}(X, Y)$ の位相の関連と Y がトーリック多様体の場合には、代数幾何学の専門家の大野准教授には、色々と代数幾何学について教えていただいた。
- Atiyah-Jones-Segal 予想問題はもともと、モース理論が関連するので、geometric topology の専門家の山田教授には、その方面でサポートいただいた。
- さらに、モース理論に関連して、無限次元モース理論と調和写像の幾何学については、調和写像の第一人者の Guest 教授に助けもらった。また、Guest 教授には、顕微鏡写像に関する不明な点にも相談させていただいた。

4. 研究成果

研究代表者、研究分担者の順で箇条書きで述べる。

- 研究代表者は、写像空間に関する Atiyah-Jones-Segal 型予想問題を研究してきた。

平成 26 年度は、 X と Y が実代数的多様体のとき、多項式で表現される X から Y への代数

的写像 (正則写像) のなす空間 $\text{Alg}(X, Y)$ が, 対応する連続写像全体のなす無限次元写像空間 $\text{Map}(X, Y)$ をどの程度の次元までそのホモトピー型を近似するかを研究した. とくに, A. Kozłowski 教授 (Warsaw 大学) と大野准教授 (電通大) との共同研究で, X が m 次元実射影空間 $\mathbb{R}P^m$ で, Y が非特異コンパクトトーリック多様体 Y の場合にこの近似次元を, Y の扇 (fan) Σ の組合せ構造から具体的に決定することに成功した (論文 [4] 参照).

平成 27 年度は, X が複素 1 次元射影空間 $\mathbb{C}P^1$ で, Y が非特異トーリック多様体の時に有限次元空間 $\text{Hol}(\mathbb{C}P^1, Y)$ が, 無限次元空間 $\text{Map}(\mathbb{C}P^1, Y)$ のホモトピー型をどの程度 (どの次元まで) まで近似するかを研究した. その結果, 以前に, Guest 教授 (早稲田大学) と Kozłowski 教授との共同研究で得られた複素射影空間のコンパクトでないあるトーリック部分多様体の family について得られたホモトピー安定性の次元の改良に成功した. この結果の証明では, scanning map に関して, Guest 教授から有益なアドバイスが役だった. (論文 [3] 参照)

さらに, この研究をより一般のトーリック多様体に拡張する試みも行った. とくに, Y がコンパクトでない場合に, Atiyah-Jones-Segal 型定理が成り立つための条件を, Kozłowski 教授との共同研究で考察し, これが成り立つ適切な条件を見つけることに成功した. (論文 [2], arXiv:1803.02154 参照)

また, 研究代表者は, 平成 28 年度 ~ 29 年度には, 関連して resultant (一般化された終結式) の空間のホモトピー型の研究も行い, 複素射影空間の模型から定義される resultant の空間 $\text{Poly}_n^{d,m}$ のホモトピー型を完全に決定することに成功した. この結果により, 従来まで知られていた, G. Segal の有利関数の空間の結果 (Acta Math. (1979)) や, F. Cohen-R. Cohen-Mann-Milgram の結果 (Acta Math. (1991)) の結果の一般化にも成功した. (論文 [1], [2] 参照)

- 4 次元多様体の研究分担者は, 平成 26 年度は, 例外的手術から構成される 4 次元多様体の研究を継続した. 特に, Mazur の 2 成分絡み目とその一般化に注目し, 意外に多くの具体例を発見したのでその分析を多項式不変量などの観点から試みた. さらに, 平成 27 年度には, 例外的手術に関する情報数理的な結果を利用して, 4 次元多様体の構造変化に関する Mazur link の Dehn 手術全ての幾何構造を決定し, 幾何構造の分布の地理的考察を行った.

引き続き, 平成 28 年度には, レンズ空間手術と 4 次元多様体の関わりに関して, ヒーガードフレアー理論 (Hegaard Floer theory) に由来する「changemaker」の概念とデバインド表示の関連研究を開始し, 典型的な具体例と今後の展望について研究集会で講演した. 最後に, 平成 29 年度は, 例外的デーンス手術を利用して 4 次元多様体を構成する観点から, 可縮だが球体ではない 4 次元多様体を与えることで知られる特殊な 2 成分絡み目の族について, 整数係数手術の中での例外的デーンス手術の分布について考察した. (論文 [9], [10] 参照)

- 代数幾何学担当の研究分担者は, 平成 26 年度には, 射影空間上の第 1 チャーン類が 2 の nef なベクトル束, および, 非特異 2 次超曲面上の第 1 チャーン類が 1 の nef なベクトル束について研究し, Peternell-Szurek-Wisniewski の分類の別証明を得た. さらに, 平成 26 年度の結果を進展させて, 平成 27 年度には, 射影空間上の nef (nef) なベクトル束と 2 次曲面上の nef なベクトル束に関するいくつかの新しい分類結果を得ることに成功した. 平成 28 年度には, 平成 27 年度に引き続き, 完備な強い意味での例外ベクトル束列をもつ非特異射影多様体上の nef なベクトル束について研究した. とくに, 射影空間上の第 1 チャーン類が 3 で第 2 チャーン類が 8 の nef な (代数的) ベクトル束を, 極小自由分解によるわかりやすい記述を与えることで分類した. また, 平成 29 年度は, 射影空間上の第 1 チャーン類が 3 の nef なベクトル束を, (以前から残っていた場合, 特に第 2 チャーン類が 9 の場合を含めて) 分類することに成功した. 証明の過程で, そのようなベクトル束がいつ大域生成になるかについても決定した. (論文 [10], [11] 参照)
- 微分空間の位相とラベル付き配置空間 (configuration space) の研究分担者は, 平成 27 年度は, 微分空間の圏における写像空間や配置空間のホモトピー型を調べるための基本的な手段を与えるスムーズ・ホモトピー論について研究を進めた. とくにそれらが位相空間の圏におけるホモトピー論と本質的に一致する圏のモデル構造が Quillen 同値であるという形で証明することに成功した. 平成 28 年度は, 滑らかな多様体間の写像に関する Whitney 近似定理を, 微分空間の圏において定義される滑らかなセル複体間の写像に一般化することに成功し, その結果を用いて, 微分空間の圏のモデル構造と位相空間のそれとの間に Quillen 同値が存在することを示した. 最後に, 平成 29 年度は,

滑らかな多様体の間の写像に関する Whitney 近似定理を, 微分空間の圏 (category) においても定義される滑らかなセル複体の写像に一般化することに成功した. その結果, これを用いて, J.H.C.Whitehead の定理および de Rham の定理が微分空間の圏でも成立することが証明できた. (論文 [21] 参照)

5. 主な発表論文等

(研究代表者, 研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 20 件)

- (1) A. Kozłowski and K. Yamaguchi, The homotopy type of spaces of resultants of bounded multiplicity, *Topology and its Appl.*, 査読有, **232**, 112-139 (2017). doi:10.1016/j.topol.2017.10.002
- (2) A. Kozłowski and K. Yamaguchi, The homotopy type of spaces of polynomials with bounded multiplicity, *Publ. Res. Inst. Math. Sci. Kyoto Univ.*, 査読有, **52-3**, 297-308, (2016). doi: 10.4171/PRIMS/182
- (3) A. Kozłowski and K. Yamaguchi, The homotopy type of spaces of coprime polynomials revisited, *Topology and its Appl.*, 査読有, **206**, 284-304 (2016). doi: 10.1016/j.topol.2016.03.033
- (4) A. Kozłowski, M. Ohno and K. Yamaguchi, Spaces of algebraic maps from real projective spaces to toric varieties, *J. Math. Soc. Japan*, 査読有, **68-2**, 745-771, (2016). doi: 102969/jmsj/06820745
- (5) K. Yamaguchi, Note on the space of polynomials with roots of bounded multiplicity, 京都大学数理解析研究所講究録, 査読無, **1968**, 126-129 (2015).
- (6) K. Yamaguchi, Spaces of equivariant maps to toric varieties, 京都大学数理解析研究所講究録, 査読無, **1922**, 28-33 (2014).
- (7) A. Kozłowski, M. Ohno and K. Yamaguchi, The space of maps from a real projective space to a toric variety, 京都大学数理解析研究所講究録, 査読無, **1876**, 120-125 (2014).
- (8) M. Tange and Y. Yamada, Four-dimensional manifolds constructed by lens space surgeries of distinct types, *J. Knot Theory Ramifications*, 査読有, **26**, 51pp (2017). doi: 10.1142/S0218216517500699
- (9) T. Kadokami and Y. Yamada, Lens space surgeries along certain 2-component links related with Park's rational blow down, and Reidemeister-Turaev torsion, 査読有, **96**, 78-126 (2014).
- (10) M. Ohno, Nef vector bundles on a quadratic surfaces with the first Chern class (2, 1), (to appear) *Advances in Geometry*, 査読有.
- (11) M. Ohno, Nef vector bundles on a projective space with first Chern class 3 and second Chern class 8, *Matematiche (Catania)*, 査読有, **72**, 69-81 (2017). doi:10.4418/2017.72.2.5
- (12) H. Ito, A. Noma and M. Ohno, Maximal minors of a matrix with linear form entries, *Linear Multilinear Algebra*, 査読有, **63**, 1599-1606 (2015). doi:10.1080/03081087.2014.959516
- (13) M. Ohno and H. Terakawa, A spectral sequence and nef vector bundles of the first Chern class two on hyperquadrics, 査読有, **60**, 397-406 (2014). doi: 10.1007/s11565-013-0188-6
- (14) M.A. Guest and N.-K. Ho, Lie-theoretic description of the solution space of the tt^* -Toda equations, *Math. Phys. Anal. Geom.*, 査読有, **20**, Art 24, 27 pp. (2017).
- (15) M.A. Guest and C. Hertling, Painlevé III: a case study in the geometry of meromorphic connections, *Lecture Notes in Math.*, 査読有, **2198**, Springer, Cham, xii+217 pp. (2017).
- (16) M.A. Guest, A. Its and C.-S. Lin, Isomonodromy aspects of tt^* equations of Cecotti and Vafa I. Stokes data, *Inst. Math. Res. Not. IMRN*, 査読有, **22**, 11745-11784 (2015).
- (17) M.A. Guest, A. Its and C.-S. Lin, Isomonodromy aspects of tt^* equations of Cecotti and Vafa II: Riemann-Hilbert problem, *Comm. Math. Phys.*, 査読有, **336**, 337-380 (2015).
- (18) M.A. Guest and H. Sakai, Orbifold quantum D-modules associated to weighted projective spaces, *Comment. Math. Helv.*, 査読有, **89**, 273-297 (2014).
- (19) M.A. Guest and C.-S. Lin, Nonlinear PDE aspects of the tt^* equations of Cecotti and Vafa,

- J. Reine Angew. Math., 査読有, **689**, 1-32 (2014).
- (20) T. Haraguchi and K. Shimakawa, Homology and cohomology via enriched bifunctors, Kyushu Journal of Mathematics, 査読有, (to appear) **72-2**, (2018).
- [学会発表] (計 23 件)
- (1) 山口耕平, The topology of spaces of rational curves on a toric variety and related problems, 岡山大学理学部談話会, 岡山大学理学部 (岡山市北区津島中), (2018.3.7).
- (2) 山口耕平, Spaces of resultants with bounded multiplicity and its real analogues, 研究集会「実特異点論とその応用」, 北海道大学大学院理学研究院 (札幌市北区), (2018.2.19-2018.2.22). (<http://www.mmm.muroran-it.ac.jp/~masatomo/Izumiyu2018.html>)
- (3) 山口耕平, The homotopy of spaces of resultants of bounded multiplicity, 研究集会「福岡ホモトピー論セミナー」, 福岡大学セミナーハウス (福岡市中央区), (2018.1.7-2018.1.8). (<http://surgery.matrix.jp/math/Program180107.pdf>)
- (4) 山口耕平, The problem of spaces of resultants related to rational curves on a toric variety, 京都大学数学教室「代数トポロジーセミナー」, 京都大学大学院理学研究科 (京都市左京区), (2017.12.25). (<https://www.math.kyoto-u.ac.jp/ja/event/seminar/3070>)
- (5) 山口耕平, Spaces of resultants of bounded multiplicity and its related problems, 研究集会「空間の代数的・幾何的モデルとその周辺」, 信州大学理学部 (松本市旭) (2017.9.5-9.7).
- (6) A. Kozłowski, 山口耕平, The homotopy of spaces of rational curves on a toric variety, 研究集会「群作用と位相」, 城崎健康福祉センター (豊岡市城崎町), (2016.12.5).
- (7) 山口耕平, レゾルタントのホモトピー型と関連する話題について, 京都大学大学院数学教室談話会 (京都市左京区), (2016.6.22). (<https://www.math.kyoto-u.ac.jp/ja/event/seminar/1270>)
- (8) 山口耕平, Segal type fibration sequences and scanning maps, RIMS 研究集会「新しい変換群論の幾何」, 京都大学数理解析研究所 (京都市左京区), (2015.5.28).
- (9) A.Kozłowski, 山口耕平, The homotopy type of the space of rational curves on a toric variety, 研究集会「ホモトピー論における有限と無限」, 九州大学西新プラザ (福岡市早良区西新), (2015.3.20). (<http://www.math.uryuky.ac.jp/~tsukuda/hakata2015/#abstract>)
- (10) 山口耕平, The Atiyah-Jones type problem for the space of holomorphic maps on a certain toric variety, 第41回変換群シンポジウム, 蒲郡市民会館 (愛知県蒲郡市), (2014.11.13). (http://www.isc.meiji.ac.jp/~takahiko/workshop/TransformationGroups2014/trans2014_abstract.pdf)
- (11) 山口耕平, The space of maps to a real toric variety, 京都大学数理解析研究所研究集会「変換群の位相幾何と代数構造」, 京都大学数理解析研究所 (京都市左京区), (2014.5.26).
- (12) 山田裕一, Exceptional Dehn surgeries along the Mazur link, 日本数学会秋季総合分科会, 山形大学小白川キャンパス (山形市小白川町), (2017.9.11).
- (13) 山田裕一, Change maker とトーラス結び目のレンズ空間手術, 研究集会「瀬戸内結び目セミナー」, 大島商船高専 (山口県大島郡周防大島町), (2016.9.3).
- (14) 山田裕一, レンズ空間手術と4次元多様体の Kirby calculus, 東大トポロジー通うセミナー, 東大数理科学研究科 (東京都目黒区), (2015.12.8).
- (15) 山田裕一, Exceptional Dehn surgeries along the Mazur link and its application, 研究集会「4次元トポロジー」, 大阪市立大学理学部 (大阪市住吉区), (2015.11.22).
- (16) 山田裕一, Four dimensional manifolds constructed by lens space surgeries, 日本数学会秋季総合分科会, 京都産業大学 (京都市北区), (2015.9.13).
- (17) 大野真裕, 射影空間上と2次元面上の第1Chern類が小さいネフなベクトル束について, 京都の西北代数幾何学セミナー, 早稲田大学西早稲田キャンパス (東京都新宿区西早稲田), (2016.11.11).
- (18) 大野真裕, 射影空間上の第1Chern類が3のネフなベクトル束について, 研究集会「射影多様体の幾何とその周辺 2016」, 高知工科大永国寺キャンパス (高知県香美市), (2016.10.8).

- (19) 島川和久, 原口忠之, Whitney approximation on smooth cell complexes, 第4回変換群シンポジウム, 福井市フェニックスプラザ (福井市田原), (2017.11.8).
- (20) 奥山真吾, 島川和久, 部分的モノイドにラベルを持つ区間の配置空間, 日本数学会秋季総合分科会, 山形大学小白川キャンパス (山形市小白川町), (2017.9.13).
- (21) 島川和久, 微分空間のホモトピー論について, 研究集会「安定ホモトピー論とその周辺」, 岡山大学理学部 (岡山市北区津島中), (2017.3.15).
- (22) 島川和久, Whitney approximation on smooth cell complexes, 研究集会「ホモトピー論と特異点論小研究集会」, 北海道大学理学部 (札幌市北区), (2017.1.22).
- (23) 奥山真吾, 島川和久, 部分的モノイドにラベルを持つ区間の配置空間の構成, 平成28年度日本数学会中国・四国支部例会, 愛媛大学理学部 (松山市文京町), (2017.1.22).

[図書] (計0件)

[産業財産権]

○出願状況 (計0件)

名称:

発明者:

権利者:

種類:

番号:

出願年月日:

国内外の別:

○取得状況 (計0件)

名称:

発明者:

権利者:

種類:

番号:

出願年月日:

国内外の別:

[その他]

ホームページ等

<http://kjk.office.uec.ac.jp/Profiles/4/0000339/profile.html>

<http://kjk.office.uec.ac.jp/Profiles/5/0000495/profile.html>

<http://kjk.office.uec.ac.jp/Profiles/6/0000506/profile.html>

<http://www.f.waseda.jp/martin/>

6. 研究組織

(1) 研究代表者

山口 耕平 (YAMAGUCHI KOHHEI)

電気通信大学・大学院情報理工学研究科・教授

研究者番号: 00175655

(2) 研究分担者

山田 裕一 (YAMADA YUICHI)

電気通信大学・大学院情報理工学研究科・教授

研究者番号: 30303019

(3) 研究分担者

大野 真裕 (OHNO MASAHIRO)

電気通信大学・大学院情報理工学研究科・准教授

研究者番号: 70277820

(4) 研究分担者

ゲスト マーティン (GUEST MARTIN)

早稲田大学・理工学術院・教授

研究者番号: 10295470

(5) 研究分担者

島川 和久 (SHIMAKWA KAZUHISA)

岡山大学・自然科学研究科・特命教授

研究者番号: 70109081