

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 29 年 5 月 19 日現在

機関番号：18001

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2014～2016

課題番号：26400086

研究課題名(和文) 離散群のトポロジーと増大級数

研究課題名(英文) Topology of discrete groups and growth series

研究代表者

藤井 道彦 (Fujii, Michihiko)

琉球大学・理学部・教授

研究者番号：60254231

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,400,000円

研究成果の概要(和文)：研究代表者・藤井道彦は、2以上の自然数 p と q を与えると定まる群 $G(p, q)$ に対して、群 G の球面的増大級数 SZ および測地的増大級数 GZ の研究を行った。得られた主な研究成果は次の3つである。(1) $G(p, q)$ の元の代表元が測地的であるための必要十分条件を記述した；(2) SZ の有理関数表示を与えた；(3) $G(p, q)$ のすべての測地的代表元を受理するオートマトンの構築に成功し、 GZ の有理関数表示を与えた。

研究成果の概要(英文)：The head investigator Fujii obtained several results concerning the growth series for a group $G(p, q)$, which is determined if arbitrary integers greater than or equal to two, p and q , are given. First, Fujii described a necessary and sufficient condition for a representative of an element g of $G(p, q)$ to be shortest among all representatives of g . Next, Fujii gave a rational function expression for the spherical growth series for $G(p, q)$. Moreover, Fujii constructed a finite state automaton which accepts all of the shortest representatives of $G(p, q)$, and obtained a rational function expression for the geodesic growth series for $G(p, q)$.

研究分野：位相幾何学

キーワード：増大級数 有限生成群 有理関数表示 トーラス結び目群 ケーリー・グラフ オートマトン

1. 研究開始当初の背景

サーストーンが双曲群の増大級数の有理関数表示問題を提起して以来、様々な条件のもとで双曲群の増大級数の有理関数表示に関する研究が、特にヨーロッパと米国の研究者を中心として行われてきた。その後、エプシュタインが一般の離散群に対してもこの3次元ザイフェルト多様体の基本群の場合に、3次元ザイフェルト多様体の基本群の場合に、問題を広げると、さらに離散群の増大級数に関する研究が盛んに行われるようになった。研究開始当初は、離散群の中でもブレイド群を始めとするアルティン群の増大級数が有理関数表示を持つかどうか、という問題意識のもとで、様々な角度からアルティン群の増大級数の研究が行われていた。特に、マイルッセとマテウスによって、二面体型アルティン群の増大級数の具体的な有理関数表示が求められたことが専門家の間では注目を集めていた。また、本研究の連携研究者・斎藤恭司による、アルティン・モノイドの増大級数に関する研究も数論的観点からみると重要なものであった。一方、曲面の写像類群に関しては、モッシャーによって、写像類群がオートマティック構造を持つことが示されていたが、写像類群の重要性の割には、その増大級数に関する研究は国内外でもあまりなされていないという状況であった。以上のことから、アルティン群や写像類群を始めとする幾何的に重要な離散群に関して、その増大級数に関する研究を進めていくことは重要であると考えられていた。

2. 研究の目的

有限生成な離散群 G に対して、有限生成系を1つ選び、群 G の π_1 に関するケーリー・グラフを考える。本研究では、ケーリー・グラフのトポロジーを考察し、群 G の測地的代表元を求めることによって、 G の弱測地的オートマティック構造を構築し、 G の球面的および測地的増大級数の有理関数表示を求めることを目的とした。特に、幾何的に重要な群とそれに関連する群に的を絞って研究した。また、不変量を始めとする幾何的情報と増大級数の関係を探求することも目的とした。

3. 研究の方法

(1) 研究代表者・藤井道彦は、連携研究者・佐藤隆夫および斎藤恭司と共同で、組み合わせ論および数論的手法を用いて、アルティン群の増大級数に関する研究を行った。
(2) 藤井は、研究分担者・上正明と共同で、トポロジー、幾何学的群論および代数的手法を用いて、3次元ザイフェルト多様体の基本群の場合に、増大級数の研究を行った。また、3次元ザイフェルト多様体の不変量と増大

級数の関連も探究した。

(3) 藤井は、連携研究者・河澄響矢と共同で、トポロジー、双曲幾何および代数的手法を用いて、曲面の写像類群の場合に、その測地的代表元の研究およびオートマティック構造の研究を行った。

4. 研究成果

(1) 研究代表者・藤井道彦は連携研究者・佐藤隆夫とともに、二面体群型のピュア・アルティン群 P について、群 P の測地的増大級数 GS の増大率 (GS の収束半径の逆数) がある数論的性質 (すなわち $\frac{1}{GS}$ がピソ数であるという性質) を持つことを数論的手法を用いて証明した。ケラーハルス教授 (スイス・フリブール大学) がある種のコグゼター群の増大率がペロン数 (ピソ数ならペロン数である) であろうと予想している。この研究成果は、より広範囲の群についてもその予想が成り立つことを示唆する重要な例となっている点で、増大度を研究する専門家の中ではインパクトを与えるものとなった。

(2) 藤井は、2以上の整数 p と q を与えると定まる、2つの無限巡回群の融合積となる群 $G(p, q)$ について、詳細に研究した。具体的に得られた研究成果は次のものである。

1 群 $G(p, q)$ に対するポジティブ・モノイド $G(p, q)_+$ が $G(p, q)$ に自然に単射で埋め込めることを示した。証明でポイントとなるのは、プリースコーンと斎藤が有限型アルティン群に対してポジティブ・モノイドの元のキャンセラティビティを示したのと同様の議論が群 $G(p, q)$ についても行える点である。

2 ポジティブ・モノイド $G(p, q)_+$ に関して、増大関数の係数の満たすべき漸化式を求めて、それを用いて $G(p, q)_+$ の増大関数の有理関数表示を求めた。

3 群 $G(p, q)$ の幾何的および代数的な観点から最も自然な有限生成系を π_1 とする。本研究では、群 $G(p, q)$ の元の代表元が π_1 に関して測地的であるための必要十分条件を与えた。幾何学的群論の観点からみると、ここで与えた条件は、2006年にマイルッセとマテウスが二面体型アルティン群の場合に与えた必要十分条件を一般化したものとなっている。さらに、マイルッセとマテウスの条件が1次元的であるのに対して、本研究での条件は2次元的である。この点でこの研究成果から新たな知見を得られるので、この研究は意義深いと思われる。

4 さらに、群 $G(p, q)$ の元がただ一つだけ測地的代表元をもつための必要十分条件が得られた。この条件は、2006年にマイルッセとマテウスが二面体型アルティン群に対して与えたものと類似する条件である。

5 $G(p, q)$ で得られた必要十分条件を用いて、群 $G(p, q)$ の各元に対して丁度一つだけ測地的代表元を取り出す方法を考案した。その結果、

群 $G(p, q)$ の測地的オートマトン(ワードアクセプター)を構築できた。

6⁵で構築した測地的オートマトンを用いて、群 $G(p, q)$ の球面的増大級数 S の計算を実行し、球面的増大級数 S の有理関数表示を得られた。1992年にエドジュベットとジョンソンによって $p=q$ の場合、1994年にシャピロによって $(p, q)=(2, 3)$ の場合に $G(p, q)$ の球面的増大級数 S の有理関数表示が得られていたが、本研究成果は、彼らの結果をすべての (p, q) に場合に一般化したものであり、群 $G(p, q)$ の幾何群論的研究においてインパクトがあるといえる。また、2013年に田村、中川および山下によって、本研究で扱っている有限生成系とは異なる有限生成系に関する、群 $G(p, q)$ の球面的増大級数の有理関数表示が得られているが、本研究で考えている有限生成系の方がよりも幾何的にも代数的にも自然な点で、本研究での研究成果は意義がある。

7 群 $G(p, q)$ の球面的増大級数 S の有理関数表示を求めるプログラムを数式処理システム(Mathematica)を用いて作成した。このプログラムを計算機上で実行すると、2以上の整数 p および q を与えると瞬時に S の有理関数表示を得られる。この点で、このプログラムは大変有用である。

8 群 $G(p, q)$ のすべての測地的代表元を受理するオートマトンの構築に成功し、群 $G(p, q)$ の測地的増大級数 GS の有理関数表示が得られた。群 $G(p, q)$ に関して、すべての測地的代表元を捉えることはこれまで難解と思われており、測地的増大級数 GS に関する研究が行われたことはなかった。その点で、本研究成果は画期的といえる。

9 今後の展望としては、群 $G(p, q)$ の球面的増大級数 S および測地的増大級数 GS の有理関数表示の分母の多項式を複素解析的および数論的な視点から考察することによって、 S および GS の増大度の幾何的および数論的性質を探究することが重要と考えられる。群 $G(p, q)$ は、3次元ザイフェルト多様体 $M(p, q)$ の基本群であるので、多様体論の観点から、種々の位相不変量と S および SG の増大度との関係性を研究することも今後の研究課題となる。

(3) 研究分担者・上正明は、ザイフェルト有理ホモロジー3球面と呼ばれる3次元多様体のクラスに対して、ミュー・バー不変量をエータ不変量で表すことに成功した。このことは、3次元ザイフェルト多様体については、古典的な位相不変量を幾何的に重要な解析的な不変量を用いて表現できることを示しており、本研究は3次元多様体の不変量に関して新しい知見を与えるものである。今後の展望としては、3次元ザイフェルト多様体の様々な不変量と増大級数との関連を解明することが重要であると考えられる。

(4) 連携研究者・佐藤は、自由群の自己同型群の降下フィルトレーションとアンドレ

アダキス-ジョンソン・フィルトレーションとの差を調べることによって、ジョンソン-森田理論の類似の理論が構築できることを考察し、Fricke 指標環を用いる場合には、自由群の自己同型群の新たな降下フィルトレーションが得られることを証明した。今後は、新たな表現論の構築をすることによって、本研究で考察した行列群に対して、最高ウェイト理論を確立することを目的として、研究を進めていきたい。

(5) 連携研究者・河澄響矢は、ゴールドマン-トゥラエフ-リー双代数の形式表示をもとにして、任意のコンパクト曲面について柏原-ヴェルニユ問題を定式化した。特に、トゥラエフ余括弧積に由来するジョンソン準同型像の制約条件が、榎本-佐藤・トレースによるものと同値であることを証明した。今後は、ゴールドマン-トゥラエフ-リー双加群を、形式的シンプレクティック幾何へ応用することを考えている。

(6) 連携研究者・斎藤恭司は、増大級数の概念を一般化して、ある種のモノイドに対して、擬増大級数という概念を導入して、具体的に擬増大級数の有理関数表示を求めた。今後は、幾何的および数論的な観点から、擬増大級数に関する研究を進めていきたいと考えている。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計10件)

1 M. Fujii and T. Satoh, The geodesic growth series for pure Artin groups of dihedral type, to appear in RIMS Kokyuroku Bessatsu B66 (2017), 133--146. (査読有)
<https://www.math.kyoto-u.ac.jp/~mfujii/geodesic/fujii-satoh-geodesic-26.pdf>
<http://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/~kenkyubu/bessatsu.html>

2 A. Alekseev, N. Kawazumi, Y. Kuno and F. Naef, Higher genus Kashiwara-Vergne problems and the Goldman-Turaev Lie bialgebra, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I. 355 (2017), 123--127. (査読有)
Doi:<http://doi.org/10.1016/j.crma.2016.12.007>

3 M. Fujii, Computation of the spherical growth series of finitely generated groups and monoids by using automata, in Handbook of Group Actions, Advanced Lectures in Mathematics 32-2 (2015), 479--521, edited by L. Ji, A. Papadopoulos and S.-T. Yau, Higher Education Press and International Press, Beijing and Boston. (査読無)
<https://www.math.kyoto-u.ac.jp/~mfujii/kunming/kunming-original-version.pdf>
<http://www.intlpress.com/site/pub/pages/books/items/00000439/index.html>

4 T. Satoh, On the basis-conjugating automorphism groups of free groups and free metabelian groups, *Mathematical Proceedings Cambridge Philosophical Society* 158 (2015), 83-109. (査読有)
DOI:<https://doi.org/10.1017/S0305004114000619>

5 T. Satoh, The Johnson-Morita theory for the ring of Fricke characters of free groups, *Pacific Journal of Mathematics*, 275 (2015), 443-461. (査読有)
DOI: 10.2140/pjm.2015.275.443

6 E. Hatakenaka and T. Satoh, On the rings of Fricke characters of free abelian groups, *Journal of Commutative Algebra* 7 (2015), 545-565. (査読有)
<http://projecteuclid.org/euclid.jca/1453211673>

7 E. Hatakenaka and T. Satoh, On the graded quotients of the ring of Fricke characters of a free group, *Journal of Algebra* 430 (2015), 94-118. (査読有)
DOI:<http://dx.doi.org/10.1016/j.jalgebra.2015.01.027>

8 M. Fujii and T. Satoh, The growth series for pure Artin monoids of dihedral type, *RIMS Kokyuroku Bessatsu B48* (2014), 111--130. (査読有)
<http://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/~kenkyubu/bessatsu.html>

9 N. Kawazumi, Surface topology and involutive bimodules, *RIMS Kokyuroku Bessatsu B48* (2014) 1--23. (査読有)
<http://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/~kenkyubu/bessatsu.html>

10 K. Saito, The skew-growth function on the monoid of square matrices. *Journal of Algebra* 402 (2014), 294-318. (査読有)
DOI:<http://dx.doi.org/10.1016/j.jalgebra.2013.11.017>

[学会発表](計 15 件)

1 M. Fujii, The geodesic growth series of Seifert fiber spaces over disks with two cone points, *Workshop "Journées de Géométrie Hyperbolique 2017"*, 2017 年 3 月 24 日, University of Fribourg, Fribourg, Switzerland.

2 N. Kawazumi, Differential forms and functions on the moduli space of Riemann surfaces, *Seminaire Algèbre et topologie*, 2017 年 1 月 30 日, IRMA, Université de Strasbourg, Strasbourg, France.

3 藤井 道彦, On the growth of Seifert fiber spaces over disks with two cone points, *複素解析セミナー*, 2016 年 11 月 10 日, 大阪市立大学大学院理学研究科, 大阪府大阪市住吉区杉本.

4 N. Kawazumi, Some tensor field on the Teichmüller space, OIST workshop

"MCM2016", 2016 年 10 月 25 日, 沖縄科学技術大学院大学, 沖縄県国頭郡恩納村字谷.

5 K. Saito, Zero loci of Chapoton's F-triangles, *Workshop "Topology and Analysis of Discrete Groups and Hyperbolic Spaces"*, 2016 年 6 月 20 日, 京都大学数理解析研究所, 京都府京都市左京区北白川追分町.

6 M. Fujii, On the growth of torus knot groups, *Oberseminar Geometrie*, 2016 年 3 月 22 日, University of Fribourg, Fribourg, Switzerland.

7 T. Satoh, On the Johnson homomorphism of the automorphism groups of free groups, *Workshop "Automorphism groups of free groups"*, 2015 年 11 月 9 日, University of Copenhagen, Copenhagen, Denmark.

8 T. Satoh, The Johnson-Morita theory for the rings of Fricke characters, *Workshop "Glances@Manifolds"*, 2015 年 7 月 18 日, Uniwersytet Jagiellonski, Krakow, Poland.

9 M. Fujii, On the growth of torus knot groups, *Workshop "Geometry and Analysis of Discrete Groups and Hyperbolic Spaces"*, 2015 年 6 月 24 日, 京都大学数理解析研究所, 京都府京都市左京区北白川追分町.

10 N. Kawazumi, A tensorial description of the Turaev cobracket on genus 0 compact surfaces, *Workshop "Geometry and Analysis of Discrete Groups and Hyperbolic Spaces"*, 2015 年 6 月 22 日, 京都大学数理解析研究所, 京都府京都市左京区北白川追分町.

11 上 正明, ザイフェルトホモロジー - 3 球面の μ -bar 不変量, エータ不変量と d 不変量について, 研究集会「微分トポロジー-15」, 2015 年 3 月 26 日, 京都大学大学院理学研究科数学教室, 京都府京都市北白川追分町.

12 河澄 響矢, 種数 0 コンパクト曲面上の Turaev 余括弧積のテンソル表示, 日本数学会トポロジー分科会一般講演, 2015 年 3 月 23 日, 明治大学駿河台キャンパス, 東京都千代田区神田駿河台.

13 藤井 道彦, The growth series for pure Artin groups of dihedral type, 日本数学会トポロジー分科会一般講演, 2015 年 3 月 21 日, 明治大学駿河台キャンパス, 東京都千代田区神田駿河台.

14 上 正明, The μ -bar invariants and the eta invariants for Seifert homology 3-spheres, 研究集会「多様体のトポロジーの展望」, 2014 年 11 月 19 日, 東京大学数理学研究科, 東京都目黒区駒場.

15 藤井 道彦, On geodesic representatives of elements of braid groups, *幾何学コロキウム*, 2014 年 6 月 27 日, 北海道大学大学院理学研究科, 北海道札幌市北区北 8 条西 5 丁目.

〔その他〕

ホームページ等

(1)研究者データベース

<http://kenkyushadb.lab.u-ryukyu.ac.jp/search/index.html>

(2) 開発したプログラムを掲載した URL

<https://www.math.kyoto-u.ac.jp/~mfujii/amalgamated/program-spherical-growth.txt>

(3)計算例を掲載した URL

<https://www.math.kyoto-u.ac.jp/~mfujii/amalgamated/examples-spherical-growth.pdf>

6. 研究組織

(1)研究代表者

藤井 道彦 (FUJII, Michihiko)

琉球大学・理学部・教授

研究者番号：60254231

(2)研究分担者

上 正明 (UE, Masaaki)

京都大学・大学院理学研究科・教授

研究者番号：80134443

(3)連携研究者

1 佐藤 隆夫 (SATO, Takao)

東京理科大学・第二理学部・講師

研究者番号：70533256

2 河澄 響矢 (KAWAZUMI, Nariya)

東京大学・大学院数理科学研究科・准教授

研究者番号：30214646

3 斎藤 恭司 (SAITO, Kyoji)

東京大学・数物連携宇宙研究機構・主任
研究員

研究者番号：20012445