

## 科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 30 年 5 月 22 日現在

機関番号：15301

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2014～2017

課題番号：26400090

研究課題名(和文) 同変多様体における不動点集合の安定性の研究

研究課題名(英文) Study of stability of fixed point sets in equivariant manifolds

研究代表者

森本 雅治 (MORIMOTO, Masaharu)

岡山大学・自然科学研究科・教授

研究者番号：30166441

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,100,000円

研究成果の概要(和文)：  $G$  を有限群とし、 $F$  をある条件を満たす閉多様体とする。ここで「ある条件」として、例えば「 $F$  はディスクや球面上の滑らかな  $G$ -作用の不動点集合となるもの」などを想定している。本研究課題の目的は、複素射影空間の列、実射影空間の列、レンズ空間の列のような特定の空間の列  $X(n)$  に対し、 $F$  を不動点集合とする滑らかな  $X(n)$  上の  $G$ -作用を構成することである。この研究期間において、 $G$  が5次の交代群、6次交代群である場合に、枠付き  $G$ -写像とその同変コボルディズムの鏡映変形法、同変手術理論、さらに  $s$ -コボルディズム理論を用いて複素射影空間列、実射影空間列、レンズ空間列に対して  $G$ -作用を構成した。

研究成果の概要(英文)： Let  $G$  be a finite group and let  $F$  be a closed manifold satisfying a certain condition such as one of  $G$ -fixed point sets of smooth  $G$ -actions on disks or spheres. The purpose of this research project was to construct smooth  $G$ -actions with fixed point set  $F$  on a specified sequence  $X(1), X(2), X(3), \dots$  of closed manifolds  $X(n)$ , for example complex projective spaces, real projective spaces, and lens spaces. In the period of the present research project, we constructed smooth  $G$ -actions with fixed point set  $F$  for the group  $G$  being the alternating group of degree 5 or 6, on sequences of complex projective spaces, real projective spaces, and lens spaces, by means of the reflection method of  $G$ -framed maps and equivariant cobordisms, equivariant surgery theory, and  $s$ -cobordism theory.

研究分野：微分トポロジー

キーワード：同変多様体 変換群論 不動点集合 同変手術理論 同変コボルディズム

1. 研究開始当初の背景

滑らかな多様体  $X$  の研究において、次の問題が重要な問題である。ここでは有限群  $G$  を固定して考える。

基本問題.  $F$  を閉多様体とすると、 $X$  上の滑らかな  $G$ -作用で不動点集合  $X^G$  が  $F$  に一致する (微分同相である) ものは存在するか?

Lefschetz の不動点定理や Smith の不動点理論によれば、この問題には  $X$  あるいは  $F$  に適切な条件を付加して研究するべきであるとわかる。実際、1970年代から「 $X$  がディスク (と微分同相) である」場合にこの問題の研究が始まり、1990年代に Oliver は、 $X$  の次元は自由に選んで良いという条件の下で、完全に解決した。また2000年以後、「 $X$  が球面である」場合に (ただし、次元は自由に選んで良いという条件の下で) この基本問題の研究が継続されている。2013年に開催された国際シンポジウムにおいて K. Pawalowski は次の Lifting 問題を問いかけた。

Lifting 問題. 多様体  $F$  が  $n$  次元球面  $S^n$  の滑らかで効果的な  $G$ -作用の不動点集合であるとき、 $F$  はより高い次元の球面  $S^{n+k}$  上の滑らかで効果的な  $G$ -作用の不動点集合になるか?

すべての自然数  $k$  について Lifting が可能であるわけではなく、自然数のある無限列

「 $k_1 < k_2 < k_3 < \dots$ 」を考え、すべての  $k = k_i$  に対して作用の Lifting が可能か否かという問いと理解される。特別な例として  $G = SL(2, 5)$  の場合を考えてみよう。E. Stein は7次元球面  $S^7$  上の  $G$ -作用で  $G$ -不動点がただ1点となるものが存在することを示した。一方、A. Borowiecka は8次元や9次元の球面には効果的な一不動点  $G$ -作用は存在しないことを証明した。

また、Hajduk-Pawalowski-Tralle (2012) は  $X = CP^1 \times \dots \times CP^1$  上の滑らかな  $S^1$ -作用で、 $X$  上のどのような symplectic 構造に対しても、その  $S^1$ -作用が symplectic な作用にはならないものを構成した (部分群による不動点集合が symplectic 多様体でないものを構成した)。この結果から、B. Hajduk, K. Pawalowski, M. Kaluba 等は symplectic 多様体上の構造を保つ  $G$ -作用の不動点集合の研究を行うため、 $X$  が複素射影空間やそれらの直積に対して、上の基本問題に関心を持っている。

このような流れから、次の問題の解明が課題となっている。

作用列の問題. 多様体  $M_i : M_1 \subset M_2$

$\subset M_3 \subset M_4 \dots$  の列と閉多様体  $F$  を与えたとき、各自然数  $i$  に対し  $F$  は  $M_i$  上の作用の  $G$ -不動点集合となるか?

2. 研究の目的

群  $G$ , 閉多様体  $F$  と  $X$  に対して「 $F$  が  $X$  上の  $G$ -作用の不動点集合になるか否か」の判定は幾何学の基本問題である。指数定理や  $G$ -符号定理などの一般論によるこの判定は、semi-free 作用など特殊な場合を除き、極めて困難である。逆に  $F$  を  $X$  上の作用に拡張しようとする試みの中で生じる様々な「微妙な」障害類を精査することで  $F$  が  $X$  上の  $G$ -作用の不動点集合になるか否か判定ができることが多い。実際球面上の  $G$ -作用の不動点集合の判定で多くの成果が出ている。この研究では複素射影空間、実射影空間、レンズ空間などの基本的な多様体上の  $G$ -作用の不動点集合や球面上の作用の Lifting 問題を同変手術理論、表現論、 $K$ -理論、ホモトピー論を応用して研究する。また、この研究により、ホモトピー論の多様体上の作用への応用、群作用と部分多様体の相互関係の理解、代数的  $K$ -理論と多様体論の関係において新たな知見を得ることを目指す。

3. 研究の方法

閉多様体  $F$  が閉多様体  $X$  の不動点集合となる  $G$ -作用を構成するため、まず標準的な多様体  $X$  上の標準的な作用の不動点集合  $F'$  についての情報を蓄積する。特に  $L(G)$ -free な作用か否か、ギャップ条件を満たすか否かが重要である。また小さな商群  $K = G/N$  について、 $F$  が (接ベクトル束や法ベクトル束が良く把握された小さな) 多様体  $M$  上の  $K$ -作用の不動点集合になるか否かを研究する。次に  $M$  上の  $K$ -作用を拡張し、球面  $S^n$  上の  $G$ -作用で  $Y^G = FUF'$  となるものを構成する。一方、同変手術障害類の構成とその消滅のための十分条件を確立しておく。そして  $S^n$  上の  $G$ -作用と  $X$  上の標準的な  $G$ -作用  $Y$  の連結和から  $F$  以外の不動点集合を、同変手術を用いて削除する。

具体的な研究の進め方.  $G$  の正規部分群  $G\{\text{nil}\}$  を  $G$  の正規部分群  $N$  で  $G/N$  が冪零となる最少のものとする。本研究期間では、 $G$  が Oliver 群で  $K = G/G\{\text{nil}\}$  が奇数位数の巡回群である、あるいは  $|K|$  がある奇素数で割り切れ  $G\{\text{nil}\}$  が二面体群  $D_{\{2pq\}}$  に同型な部分商群を持つ (つまり  $N \subset H \subset G\{\text{nil}\}$ ,  $H/N \cong D_{\{2pq\}}$ ,  $p$  と  $q$  は異なる素数) 場合に、

- ① Petrie の  $K$ -ベクトル束の間の proper な  $K$ -写像に同変横断正則変形を用いた  $K$ -多様体の構成法,
- ② Oliver の  $G$ -thickening を用いた (境界のある多様体上の)  $G$ -作用の構成法,
- ③  $G$ -不動点の削除定理 (同変手術によるの) を組み合わせて、さまざまな多様体  $F$  に

対して  $M_i$  上の  $G$ -作用で,  $(M_i)^G = F$  となるものの構成法,

の発展的研究を行い, 球面上の作用の  $G$ -不動点となる閉多様体  $F$  について, 相対的に大きな自然数  $n$  に対し  $F$  が  $n$ -次元複素射影空間,  $n$ -次元実射影空間,  $(2n-1)$ -次元レンズ空間上の作用の  $G$ -不動点集合になることを示す.

この研究を円滑に進めるために, Krzysztof Pawalowski 氏, 長崎生光氏, 角俊雄氏, 佐藤隆夫氏らと研究情報の交換を行う.

#### 4. 研究成果

$G$  を有限群とし,  $F$  はディスク上の滑らかな  $G$ -作用の不動点集合となる閉多様体とする. 基本的な空間列 (複素射影空間の列, 実射影空間の列, レンズ空間)  $X_1, X_2, X_3, \dots, X_n, \dots$  に対し,  $n > N$  ならば  $X_n$  は  $F$  を不動点集合とする滑らかな  $G$ -作用を持つ, という条件を満たす自然数  $N$  が存在するか否かを,  $G$ -写像とその同変コボルディズムの鏡映変形法, 同変手術理論, さらに  $s$ -同境理論を用いて研究し,  $G$  が 5 次あるいは 6 次の交代群である場合にこの問題を肯定的に解決した. またこの問題に関連し,  $G$  が 5 次の交代群  $A_5$ , 5 次の対称群  $S_5$ , さらに  $SL(2, 5)$  である場合に, 奇数個の点からなる  $G$ -不動点集合を持つ整係数ホモロジー球面上の作用について研究し, その接空間表現はある特定の規約表現を含まなければならないことを証明した. それにより, 奇数個の不動点集合を持ちえない球面の次元を決定した. この研究過程において, Burnside 環  $A(G)$  とその逆極限  $\text{Inv-Lim } A(H)$  の関係, また同変手術に影響する部分群のなす格子の関係を研究し, 同変手術における基本的な技法を考案した. これらの研究成果については, 数理解析研究所研究集会や一連の変換群論シンポジウムなどにおいて口頭発表し, また一部については論文として発表した.

この研究は, Krzysztof Pawalowski 氏, Marek Kaluba 氏, 長崎生光氏, 角俊雄氏らの研究に触発され, 山口耕平氏, Julius Korbas 氏, Anthony Bak 氏, 山崎正之氏らの助言, 原靖浩氏, 杉村匡史氏, 田村俊輔氏の協力があって研究成果の発表へと至った.

#### 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 8 件)

- (1) Masaharu Morimoto, Computation of quotient groups of inverse limits of Burnside rings, 数理解析研究所講究録 2060 (2018), 20--32. 査読無  
<http://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/~kyo>

[do/kokyuroku/contents/pdf/2060-04.pdf](http://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/~kyodo/kokyuroku/contents/pdf/2060-04.pdf)

- (2) Masaharu Morimoto and Masfumi Sugimura, Cokernels of homomorphisms from Burnside rings to inverse limits II:  $G = C_{\{p^m\}} \times C_{\{p^n\}}$ , Kyushu J. Math. 72 (2018), no. 1, 95--105. 査読有
- (3) Masaharu Morimoto, Cokernels of homomorphisms from Burnside rings to inverse limits, Canad. Math. Bull. 60 (2017), no. 1, 165--172. 査読有  
<http://dx.doi.org/10.4153/CMB-2016-068-6>
- (4) Masaharu Morimoto, Direct limits and inverse limits of Mackey functors, J. Algebra 470 (2017), 68--76. 査読有  
<https://doi.org/10.1016/j.jalgebra.2016.09.0024>
- (5) Masaharu Morimoto, One-fixed-point actions on spheres and Smith sets, Osaka J. Math. 53 (2016), No. 4, 1003--1013. 査読有  
<https://projecteuclid.org/euclid.ojm/1475601828>
- (6) Masaharu Morimoto, A necessary condition for the Smith equivalence of  $G$ -modules and its sufficiency, Math. Slov. 66 (2016), No. 4, 979--998. 査読有  
doi: 10.1515/ms-2015-0197
- (7) Masaharu Morimoto, On the  $V$ -transversality construction of equivariant framed maps, 数理解析研究所講究録 1968 (2015), 16--22. 査読無  
<http://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/~kyodo/kokyuroku/contents/pdf/1968-03.pdf>
- (8) Masaharu Morimoto, Tangential representations of one-fixed-point actions on spheres and Smith equivalence, J. Math. Soc. Japan 67 (2015) No. 1, 195--205. 査読有  
doi: 10.2969/jmsj/06710195

[学会発表] (計 10 件)

- (1) 森本 雅治, 田村 俊輔, Smooth one fixed point actions of  $S_5$  on spheres, 第 44 回変換群論シンポジウム, 2017 年.
- (2) 森本 雅治, Computation of quotient groups of inverse limits of Burnside rings, 変換群論を核とする代数的位相幾何学, 2017 年.

- (3) 森本 雅治, 杉村 匡史, Limits of the Burnside rings and their relations, 第 43 回変換群論シンポジウム, 2016 年.
- (4) 森本 雅治, Mackey 関手の極限について, 日本数学会秋季総合分科会, 2016 年.
- (5) 森本 雅治, Realization of closed manifolds as  $A_5$ -fixed point sets, 第 42 回変換群論シンポジウム, 2015 年.
- (6) Masaharu Morimoto, The Burnside ring, equivariant framed maps, and the reflection method, Glances at Manifolds, 2015 年.
- (7) 森本 雅治, 同変枠付き写像の  $V$ -横断正則構成について, 新しい変換群論の幾何, 2015 年.
- (8) 森本 雅治, Topological equivalence relations on representation spaces, 第 41 回変換群論シンポジウム, 2014 年
- (9) Masaharu Morimoto, Study of representation spaces from the viewpoint of algebraic/differential topology, DMV-PTM Conference 2014, 2014 年
- (10) 森本 雅治, Tentative study on equivariant surgery obstructions, 変換群論の位相幾何と代数構造, 2014 年

〔図書〕 (計 0 件)

〔産業財産権〕

○出願状況 (計 0 件)

○取得状況 (計 0 件)

〔その他〕

ホームページ等

<http://www.ems.okayama-u.ac.jp/appl/morimoto/publmme.html>

## 6. 研究組織

### (1) 研究代表者

森本 雅治 (MORIMOTO, Masaharu)

岡山大学・大学院自然科学研究科・教授

研究者番号 : 30166441