

平成 29 年 6 月 7 日現在

機関番号：16401

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2014～2016

課題番号：26400092

研究課題名(和文) 安定ホモトピー圏のピカル群の研究

研究課題名(英文) Study on the Picard groups of stable homotopy categories

研究代表者

下村 克己(Shimomura, Katsumi)

高知大学・教育研究部自然科学系理学部門・教授

研究者番号：30206247

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 2,800,000円

研究成果の概要(和文)：スペクトラムの成す安定ホモトピー圏は各素数 p に対して対応するMoravaのK理論 $K(n)$ (n は非負整数)による局所化された安定ホモトピー圏 K_n の研究に集約される。 K_n のHopkinsのピカル群の決定問題は重要な問題の一つである。本研究の目的はこの問題を直接MoravaのK理論 $K(n)$ を使う代わりにJohnson-Wilsonのスペクトラム $E(n)$ を使って、考察することであった。主結果としてはある条件の下で K_n のピカル群の幾何学的にわかる部分群は $E(n)$ で局所化された安定ホモトピー圏のピカル群の幾何学的にわかる部分群と同型であることを示した。

研究成果の概要(英文)：The stable homotopy category of spectra is understood by the stable homotopy categories K_n of spectra localized by the Morava K-theories $K(n)$ for a non-negative integers n . To determine the Hopkins' Picard group of K_n is one of important problems in the stable homotopy theory. Our aim of this study is to consider the Picard groups not by the Morava K-theories, but by the Johnson-Wilson spectrum $E(n)$. One of our main results is that the subgroup of the Picard group of K_n obtained by a geometric consideration is isomorphic to the counterpart of the Picard group of the stable homotopy category localized by $E(n)$, under a condition.

研究分野：安定ホモトピー論

キーワード：Hopkins' Picard group 安定ホモトピー圏 Morava K-theory Johnson-Wilson spectrum Adams スベクトル系列

1. 研究開始当初の背景

安定ホモトピー論は米国の M. Mahowald, D. Ravenel, H. Miller, M. Hopkins をはじめとした著名な研究者たちにより、米国、英国を中心に研究されている。その研究手法の一つが彩色理論に基づくものである。彩色理論は各素数 p と非負整数 n に対する Morava の K 理論 $K(n)$ によりスペクトラムと呼ばれる図形を一般化した対象の成す安定ホモトピー圏 S_p を考察するものである。したがって、安定ホモトピー圏 S_p を $K(n)$ で局所化してできる安定ホモトピー圏 K_n の考察は重要である。その一つの指標が Hopkins によるピカル群 Pic_n である。これは K_n の可逆スペクトラムの同型類の成す圏であるが、この場合は群になる。これについての彼らの最初の論文でピカル群 Pic_0, Pic_1 与えており、 Pic_n は幾何学的にわかる部分群 π_n を代数的に決定される部分群で拡大したものであることを示している。さらに、 Pic_2 のピカル群は素数 5 以上に対しては $\pi_2=0$ が示されており、したがって、代数的に決定されている。一方、Johnson-Wilson のスペクトラム $E(n)$ により局所化して得られる安定ホモトピー圏 L_n のピカル群 $Pic(L_n)$ もまた、幾何学的にわかる部分群 $Pic^0(L_n)$ と代数的にわかる部分群(この場合は整数環)の直和であることが、M. Hovey と H. Sadofsky により示されていた。素数 3 の場合、本研究代表者と上谷氏により $Pic^0(L_2)$ は位数 3 の群か、位数 3 の群二つの直和に同型であることを示していたがこの結果を用いて、P. Goerss, H-W. Henn, M. Mahowald, C. Rezk により、決定されていた。さらに、本研究代表者と上谷氏により $Pic^0(L_n)$ から、球面のホモトピー群に収束する $E(n)$ から作られるアダムスペクトル系列の E_2 項への単射が与えられていた。

2. 研究の目的

米英の研究者たちは Morava の K 理論 $K(n)$ を基に代数幾何学的な考察を行って研究を進めていたが、本研究では、 $K(n)$ の代わりに Johnson-Wilson のスペクトラム $E(n)$ を基に L_n のピカル群 $Pic(L_n)$ から研究を進め、 K_n のピカル群 Pic_n を決定するのを目的としている。

3. 研究の方法

ピカル群 Pic_n の生成元の可逆元 X は $E(n)_*(X \vee V) = E(n)_*(V)$ が一般戸田スミススペクトラム V に対して成り立つことが知られているので、これを基に $E(n)$ から作られるアダムスペクトル系列を分析することにより、可逆元 X の特徴づけをして、 K_n のピカル群を決定していく方法をとる。

具体的には、 $Pic^0(L_n)$ 上で定義した球面に収束する $E(n)$ アダムスペクトル系列の E_2 項への単射を $K(n)$ に対しても同様につくることが、それは球面のホモトピー群に収束する $K(n)$ アダムスペクトル系列ではなく戸田スミススペクトラム V のホモトピー群に収束する $E(n)$ アダムスペクトル系列の E_2 項に π_n からの単射を構成することである。これが作れば、Bousfield の局所化関手 $L_{\{K(n)\}}: L_n \rightarrow K_n$ から得られる準同型 $\ell: Pic^0(L_n) \rightarrow \pi_n$ が単射であることが従う。さらに、 π_n の可逆スペクトラム X を用いて、上谷氏との研究で示した位数 3 の部分群が $Pic(L_2)$ に含まれるという定理の証明に用いた手法により、 ℓ が全射であることを示そうとしていた。

単射の値域である $E(n)$ アダムスペクトル系列は球面のホモトピー群に収束するものだけでなく、一般戸田スミススペクトラムやさらにもっと一般的な計算可能なスペクトラムのホモトピー群に収束するスペクトル系列を考えていた。

4. 研究成果

直接的な研究成果は当初予定通り得られず、少しの進捗成果は、[\[1\]](#)、[\[2\]](#)、[\[3\]](#) などの学会発表で公表した。[\[1\]](#) では研究方法で述べた方法を解説し、特別な場合には成立することを発表した。[\[2\]](#) では戸田スミススペクトラム $V(1)$ と同じ $E(2)_*$ ホモロジー群を持つスペクトラムの存在について論じた。[\[3\]](#) では、ある条件下では上谷氏と示した単射は同型射になることを示した。この結果をまとめた論文は投稿中である。[\[4\]](#) ではある条件下では $Pic^0(L_n)$ と π_n は同型になることを発表した。その後、この結果を拡張することができた。その他の学会発表はこれらの研究に関連して考察していたアダムスペクトル系列に関する成果や安定ホモトピー圏に関する結果であり、[\[5\]](#)、[\[6\]](#)、[\[7\]](#) の結果は論文にまとめて投稿中である。

研究の当初は一般戸田スミススペクトラム V は一つだけ考えればうまくいくとの先入観でいろいろ考察した結果かなりの強い条件の下でしか目的の同型射は得られなかった。その部分を一般戸田スミススペクトラムの無限列にすればうまくいくのであるがこれ

は $K(n)$ を考えるのと同じで研究目的に反する。研究期間の最後の年度の後半になり、やっと、二つの一般戸田スミススペクトラムに関する条件にたどり着き目的に近い結果を得ることができた。この結果は論文にまとめて現在投稿中である。内容は、以下のようである。

球面と一般戸田スミススペクトラム V に収束する $E(n)$ から作られるアダムスペクトル系列のそれぞれの E_2 項 $E_2^{r,r-e}(S)$ と $E_2^{r,r-e}(V)$ ($e=1,2$) の間に単位写像 $S(V)$ から誘導される準同型があるが、それによる像は別の一般戸田スミススペクトラム W を経由して得られるものという条件を考える。この条件は知られている例では常に成り立っている。この条件の下で、 K_n のピカル群の幾何的にわかる部分群 π_n と E_n のピカル群の幾何的にわかる部分群 $\text{Pic}^0(L_n)$ は同型であることを示した。言い換えると、 K_n のピカル群と E_n のピカル群の違いは比較的計算しやすい代数的にわかる部分だけであるということになる。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計 3件)

Katsumi Shimomura, A beta family in the homotopy of spheres, Proceedings of American Mathematical Society, 142 (2014), 2921-28, 査読有

Katsumi Shimomura and Kie Yoshizawa, On the product $\pi_1 \otimes \pi_1$ in the stable homotopy groups of spheres, Kochi Journal of Mathematics 9 (2014), 169-172, 査読有

Ryo Kato, Katsumi Shimomura and Yutaro Tatehara, Generalized Bousfield lattices and a generalized retract conjecture, Publications of Reserch Institute for Mathematical Sciences., 50 (2014), 497-513, 査読有

[学会発表](計 10件)

下村克己, Bousfield 局所化された安定ホモトピー圏のピカル群について、2014年度ホモトピー論シンポジウム、平成26年11月2日、大阪府立大学

下村克己, $E(2)_*$ -equivalences on exotic $V(1)$ at the prime three, 高知ホモトピー論談話会 2014、平成26年12月26日、高知大学

比嘉一晃、加藤諒、下村克己, A surviving condition on permanent cycles in the Adams E_2 -term, 2014日本数学会秋季総合分科会、平成26年9月25日、広島大学

宮沢健太郎、下村克己, On the action of Greek letter element π_1 in the stable homotopy groups of spheres, 2014日本数学会秋季総合分科会、平成26年9月25日、広島大学

下村克己, On Hopkins' Picard group of L_n , 高知ホモトピー論談話会 2015, 平成27年12月27日、高知大学

下村克己, Hovey-Palmieri-Stricklandの公理的安定ホモトピー論とそのBousfield束およびHopkinsのPicard群について、(非)可換代数とトポロジー、平成28年2月20日~22日、信州大学

下村克己, $E(n)$, $K(n)$ 局所化圏のエキゾチック可逆元の関係性について、高知ホモトピー論談話会 2016, 平成28年12月27日、高知大学

岡島宏樹、加藤諒、下村克己, compactly generated tensor triangulated categories についての一考察、福岡ホモトピー論セミナー、平成29年1月9日、福岡大学

下村克己、比嘉一晃、On the zeroth cohomology group of a monochromatic module, 平成28年度日本数学会中国・四国支部例会、平成29年1月22日、愛媛大学

岡島宏樹、加藤諒、下村克己、大川の定理の一般化、平成28年度日本数学会中国・四国支部例会、平成29年1月22日、愛媛大学

[図書](計 件)

[産業財産権]

出願状況(計 件)

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
出願年月日：
国内外の別：

取得状況(計 件)

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：

取得年月日：
国内外の別：

〔その他〕
ホームページ等
<http://www.math.kochi-u.ac.jp/katsumi/publicist.html>

6．研究組織

(1) 研究代表者

下村 克己 (SHIMOMURA, Katsumi)
高知大学・教育研究部自然科学系・教授

研究者番号：30206247

(2) 研究分担者

()

研究者番号：

(3) 連携研究者

()

研究者番号：

(4) 研究協力者

()