

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 30 年 6 月 18 日現在

機関番号：32606

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2014～2017

課題番号：26400095

研究課題名(和文)リーマン面と低次元多様体

研究課題名(英文)Riemann surfaces and low dimensional manifolds

研究代表者

松本 幸夫 (Matsumoto, Yukio)

学習院大学・理学部・研究員

研究者番号：20011637

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,600,000円

研究成果の概要(和文)：リーマン面のモジュライ空間の自然なコンパクト化としてドリーニュ・マンフォードコンパクト化(DMコンパクト化)知られている。本研究の主な成果は、DMコンパクト化の上に、自然なオービフォールド・チャートからなるアトラスを具体的に構成したことである。これらのチャートは「ハーヴェイのカーヴ複体」を構成する単体達によりインデックスが付いている。この結果の副産物として、最大次元の単体によりインデックス付けられたオービフォールド・チャートに、高次元ユークリッド空間の「結晶群」が付随することを発見した。モジュライ空間のコンパクト化に結晶群が付随することの理論的な意味については将来の研究課題としたい。

研究成果の概要(英文)：It is known that the moduli space of Riemann surfaces admits a natural compactification called the Deligne-Mumford compactification (DM-compactification). The main result of the present research is that we explicitly constructed a "natural" atlas consisting of orbifold charts on the DM-compactification of moduli space. These charts are indexed by the simplices of Harvey's curve complex. As a byproduct of the result, we discovered that certain higher dimensional euclidean crystallographic groups are attached to those orbifold charts that are indexed by the simplices of the maximum dimension. The theoretical meaning of this attachment of crystallographic groups will be studied in the future.

研究分野：多様体のトポロジー

キーワード：リーマン面 ドリーニュ・マンフォードコンパクト化 オービフォールド 結晶群

1. 研究開始当初の背景

有限型リーマン面上の等角構造をすべて分類する空間がモジュライ空間である。滑らかなリーマン面だけに制限すれば、モジュライ空間はノン・コンパクトであるが、ノードを持つリーマン面(安定曲線と称される)の等角構造まで考慮すればモジュライ空間のコンパクト化が達成される。この認識は1960年代にドリーニュとマンフォードにより得られた。

(Deligne-Mumford, IHES.Publ.Math. 1969)
 付け加える安定曲線には有限な自己同型群が作用しており、それに伴い安定曲線のパラメーター近傍も有限群で割られる。したがって、コンパクト化されたモジュライ空間はオービフォールド構造を持つ。しかし、コンパクト化されたモジュライ空間の解析的な構造自身は最近になるまで十分明らかにされてこなかった。2014年に出版されたHubbard-Kochの論文(J.D.G. 2014)はコンパクト化されたモジュライ空間の無限遠点(安定曲線のモジュライ部分)における局所的なオービフォールド構造を初めて解析的に記述した。一方、研究代表者は、Bers達のやや直観的な方法に基づいて、コンパクト化されたモジュライ空間のオービフォールド・アトラスの構成を行った(IRMA Lectures,2012)。

2. 研究の目的

まず、我々のオービフォールド・アトラスをHubbard-Kochの結果に基づき、厳密に構成し直すことを目標にする。それが達成されたのち、コンパクト化されたモジュライ空間の上に、有限型のリーマン面の「普遍退化族」を構成し、この普遍退化族から、任意のリーマン面の退化族が引き戻せることを証明する。これができれば、ファイバー構造を持つ4次元多様体の何らかの不変量が構成されるはずである。

3. 研究の方法

モジュライ空間の解析的な構造及び、微分幾何的な構造については、Masur, Yamada, Wolpert 達による詳しい研究がある。コンパクト化されたモジュライ空間上に「自然なオービフォールド・アトラス」を厳密に構成するには、これらの先行研究の結果を参照しながら進むことになる。リーマン面の「極大パンツ分解」に付随するFenchel-Nielsen座標の利用が不可欠になる。

4. 研究成果

研究開始当初の背景の項で述べたように2014年のHubbard-Kochの論文はDMコンパクト化の無限遠点におけるオービフォールド構造を解析的に記述したが、それはあくまで局所的なオービフォールド・チャートの構成に留まっており、DMコンパクト化されたモジュライ空間全体にわたって「自然なオービフォールド・アトラス」を構成したものではな

い。ここに言う「自然なアトラス」の構成とは、例えば、 n 次元射影空間の持つ「 $(n+1)$ 個の自然な n 次元アフィン空間からなるアトラス」のようなアトラスをコンパクト化されたオービフォールド上に構成したいということである。本研究の主な成果はこのような「自然なオービフォールド・アトラス」をDMコンパクト化されたモジュライ空間上に構成したことである。このアトラスは有限個のオービフォールド・チャートからなり、これらのチャートはハーヴェイのカーヴ複体を写像類群で割って得られる有限複体の単体によってインデックス付けられている。各チャートは複素有界領域とそこに固有不連続に働く不連続群(ルート系に付随するアフィン・ワイル群との類似から「ワイル群」と名付けた)の対である。この複素有界領域を「ワイル群」で割れば、その商空間はDMコンパクト化されたモジュライ空間の開集合になる。この最後の条件がデリケートであり、このような性質を持つオービフォールド・アトラスを構成したことが我々の結果の新しいところである。

この結果の副産物として、ハーヴェイのカーヴ複体の最大次元の単体によってインデックス付けられたオービフォールド・チャートに、ユークリッド空間の結晶群が付随することを発見した。これは新しい知見であり、その理論的な意義は今後の研究に俟たれる。以上の成果はつぎのプレプリントにまとめた。

Y. Matsumoto, The Deligne-Mumford compactification and crystallographic groups. 残念ながら、この論文は現在レフェリー中であり、まだ出版に至っていない。

このようにDMコンパクト化の上に自然で具体的なオービフォールド・チャートを構成することはDMコンパクト化の上にリーマン面の「普遍退化族」を厳密に構成するための重要なステップであったが、「普遍退化族」の構成に進む前に研究期間が終了してしまったことは残念である。終了後も研究を続けるつもりである。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計 17件)

1 Y. Komori and Y. Uemoto, On 3-dimensional hyperbolic Coxeter pyramids, RIMS Kokyuroku Bessatsu, 査読有 B66 2018, 213--230

2 J. Deolindo Silva, Y. Kabata, and T. Ohmoto, Binary differential equation at parabolic and umbilical points for 2-parameter families of surfaces, Topology and its Applications, 査読有

vol.234 2018, 457-453

³ T. Sasajima and T. Ohmoto, Thom polynomials in A-classification I: counting singular projections of a surface, European Math. Soc. Series of Congress Reports, "Scubert Varieties, Equivariant Cohomology and Characteristic Classes, Impanga 15", 査読有、2018, 203-225

DOI:10.4171/182

⁴ T. Ohmoto and M. Shiota, $\mathbb{C}P^1$ -triangulation of semialgebraic sets, J. Topology, 査読有, vol.10 2017, 765-775
DOI:10.1112/topo.12024

⁵ T. Sasajima and T. Ohmoto, Classical Formulae on projective characters of surfaces and 3-folds, revisited, Proc. JARCS6 (Kagoshima, Nov. 2015), 査読有、Saitama J. Math. Vol.31 2017, 141-160

⁶ H. Sano, Y. Kabata, J. L. Deolindo Silva and T. Ohmoto, Classification of Jets of surfaces in projective 3-space via central projection, Bull. Brazilian Math. Soc. New Series, 査読有、vol.48 2017, 623-639

DOI:10.1007/s00574-017-0036-x

⁷ Y. Matsumoto, Curve complexes and the DM-compactification of moduli spaces of Riemann surfaces, RIMS Kokyuroku, 査読無、Vol.1991 2016, 109-116

⁸ T. Yoshida, Y. Kabata and T. Ohmoto, Bifurcation of plane-to-plane map-germs With corank 2 of parabolic type, RIMS Kokyuroku Bessatsu, 査読有、B55 2016 239-258

⁹ T. Ohmoto, Singularities of Maps and Characteristic Classes, Adv. Studies Pure Mathematics, 査読有、vol.68 2016, 171-245

¹⁰ T. Yoshida, Y. Kabata and T. Ohmoto, Bifurcation of plane-to-plane map-germs of corank two, Quarterly Jour. Math. 査読有、66 (1) 2015, 369-391

¹¹ Y. Komori and T. Yukita, On the growth Rate of ideal Coxeter groups in hyperbolic 3-space, Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci. 査読有、vol.91 2015, 155-159

¹² T. Ashikaga, Toric modifications of cyclic orbifolds and extended Zagier Reciprocity for Dedekind sums, Tohoku Math. J. 査読有、vol.67 2015, 323-247

¹³ M. Gendulpe and Y. Komori, Polyhedral realization of a Thurston compactification. Ann. Fac. Sci. Toulouse Math. 査読有、vol.23 2014, 95-114

[学会発表](計 50件)

¹ 足利 正、Castelnuovo-Horikawa index of genus three via signature divisor, 第13回代数・幾何・解析セミナー(鹿児島

大学) 2018年

² 松本 幸夫、Orbifold charts of the compactified moduli spaces and crystallographic groups, 2017年度「リーマン面・不連続群研究集会」2018年

³ 足利 正、Horikawa index of non-hyperelliptic genus three fibration, (Dliian Univ. of Tech.), 2017年

⁴ 足利 正、Horikawa index of genus three via signature divisor, Mini workshop "fibered varieties" (大阪大学) 2017年

⁵ 足利 正、Log Eichler trace formula and Hyperelliptic multiplicity, 代数幾何ミニワークショップ、2017年

⁶ 大本 亨、Geometric Algebra and singularities arising in Differential Line Geometry, 短期共同研究集会「可微分写像の特異点論の局所的研究と大域的研究」京大数理研、2017年

⁷ 大本 亨、 $\mathbb{C}P^1$ -triangulations and semi-algebraic de Rham homotopy theory, Singularity Conference, East China Normal University, Shanghai, 2017年

⁸ 松本 幸夫、4次元多様体とLefschetzファイバー空間、第64回トポロジーシンポジウム、東海大学、2017年

⁹ 小森 洋平、On spectral radii of Coxeter elements for some bipartite Coxeter diagrams, Geometry Seminar, University of Fribourg, 2017年

¹⁰ 小森 洋平、On Schwartz automorphic functions, 日本数学会2017年度秋季総合分科会、山形大学、2017年

¹¹ 足利 正、Horikawa index of genus three and hyperelliptic multiplicity, 研究集会「代数曲線と曲面及びその周辺」(大阪大学) 2016年

¹² 足利 正、Horikawa index of genus three via signature divisor, Seminar on Algebraic Geometry (East China Normal University, China) 2016年

¹³ 足利 正、A certain intersection number on moduli space of genus 3 via Dedekind sum, 代数幾何ワークショップ(首都大学東京) 2016年

¹⁴ 足利 正、Dedekind 和を用いた種数3のモジュライ空間上のある交点数表示、代数幾何ミニワークショップ、2016年

¹⁵ 大本 亨、Thom polynomials since 1957, R. Thom 記念シンポジウム (Rencontre Entre mathématiciens et physiciens), IRMA, Strasbourg, 2016年

¹⁶ 大本 亨、Hunting invariants of discriminants and images of maps, Workshop - global singularity theory and curves in Semester - Enumerative geometry of moduli space of sheaves in low dimension, Ecole Polytech. Federale de Lausanne, 2016年

¹⁷ 松本 幸夫、Compactification of moduli

spaces and crystallographic groups, Workshop on Grothendieck-Teichmüller Theories, Nankai University, Tianjin, 2016 年

¹⁸松本 幸夫、Moduli spaces and Crystallographic groups, Fudan Univ. 連続講義、2016 年

¹⁹松本 幸夫、Riemann surfaces and crystallographic groups, International Workshop on Low-dimensional Topology, Dalian Univ. of Technology, 2016 年

²⁰松本 幸夫、モジュライ空間のコンパクト化と結晶群、日本数学会年会、筑波大学、2016 年

²¹小森 洋平、On Schwartz automorphic functions, 研究集会「Topology and Analysis of Discrete Groups and Hyperbolic Space」京大数理研、2016 年

²²大本 亨、 C^1 -triangulations of semi-algebraic sets and de Rham homotopy theory, The 6-th Japanese-Australian workshop on Real and Complex Singularities, 2015 年

²³大本 亨、Singularities of plane-germs with corank two, Singularities in Generic Geometry and its Applications, Kobe-Kyoto, (Valencia IV), 2015 年

²⁴大本 亨、Classical enumerative geometry and Thom polynomials, IMPANGA, Banach center (Bedlewo, Poland), 2015 年

²⁵小森 洋平、3次元双曲理想コクセター多面体の増大度について、日本数学会 2015 年秋季総合分科会、京都産業大学、2015 年

²⁶小森 洋平、Projective embeddings of the Teichmüller spaces, 研究集会「リーマン面・不連続群」大阪大学、2015 年

²⁷小森 洋平、Arithmetic aspects of growth rates for hyperbolic Coxeter groups, 研究集会「Complex Hyperbolic Geometry and Related Topics」岡山理科大学、2015 年

²⁸足利 正、Automorphisms of stable curves and invariants of fiber germs, 代数幾何セミナー（高知工科大学）2015 年

²⁹足利 正、Another realization of Birman-Hilden relation via hyperelliptic splitting family, Mini-Symposium “Topology and singularities”（学習院大学）2015 年

³⁰足利 正、種数 3 のファイバー芽の堀川指数とアイヒラー跡公式、第 2 回代数幾何学 研究集会宇部、2015 年

³¹松本 幸夫、Crystallographic groups arising from Teichmüller spaces, Master-class, Finsler geometry and applications to low-dimensional geometry and topology and moduli spaces, Sardinia, Italy, 2015 年

³²松本 幸夫、モジュライ空間、カーブ複体、結晶群、研究集会「リーマン面に関連する位

相幾何学」東京大学数理科学研究科、2015 年

³³松本 幸夫、Curve complexes and the DM-compactification of moduli spaces of Riemann surfaces, RIMS Seminar “Topology, Geometry and Algebra of low dimensional manifolds” Numazu, 2015 年

³⁴松本 幸夫、Curve complexes and the DM-compactification of moduli spaces, 研究集会「Branched coverings, Degenerations, and Related Topics」東北学院大学工学部、2015 年

³⁵足利 正、Horikawa index of genus 3 with periodic monodromy via Eichler’s trace formula, 研究集会「リーマン面に関連する位相幾何学」2014 年

³⁶小森 洋平、トーラス上のリーマン面の退化族について、早稲田双曲幾何幾何学的群論セミナー、2014 年

³⁷松本 幸夫、Teichmüller spaces as infinite polyhedral, Summer School, Finsler Geometry with Applications, Island of Samos, Greece, 2014 年

³⁸松本 幸夫、Four dimensional manifolds and Riemann surfaces (2 lectures), Fudan University, 2014 年

6. 研究組織

(1) 研究代表者

松本 幸夫 (Matsumoto Yukio)
 学習院大学・理学部・研究員
 研究者番号：20011637

(2) 連携研究者

足利 正 (Ashikaga Tadashi)
 東北学院大学・工学部・教授
 研究者番号：90125203

小森 洋平 (Komori Yohei)
 早稲田大学・教育総合科学学術院・教授
 研究者番号：70264794

大本 亨 (Ohmoto Toru)
 北海道大学・理学研究科・教授
 研究者番号：20264400