様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９－１、Ｚ－１９　（共通）

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 ３０ 年　 ５ 月 １１ 日現在

機関番号：３２６１２
研究種目：基盤研究(C)（一般）
研究期間：2014～2017
課題番号：２６４０００９６

研究課題名（和文）双曲結び目のDunfield-Friedl-Jackson予想に関する研究

研究課題名（英文）A study on a conjecture of Dunfield, Friedl and Jackson for hyperbolic knots

研究代表者
森藤　孝之（MORIFUJI, Takayuki）

慶應義塾大学・経済学部（日吉）・教授

研究者番号：９０３３４４６６

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　3,300,000円

研究成果の概要（和文）：本研究は，3次元球面内の双曲結び目のファイバー性と種数に関するDunfield-Friedl-Jackson予想の解決に向けて，結び目群の指標代数多様体の適当なスライスとねじれアレキサンダー多項式の情報を用いて，ファイバー性と種数を決定することを目標としている．得られた成果の概要は以下の通りである．
(1) パラボリック表現の定める指標代数多様体によって，2橋結び目が分類できることを示した．
(2) 長さ3を持つ双曲的プレッツェル結び目に対して，上記予想を肯定的に解決した．

研究成果の概要（英文）：The purpose of this research was to give an answer to a conjecture of Dunfiled, Friedl and Jackson on the genus and fiberedness of a hyperbolic knot. To this end, we used information on a certain slice of the character variety of the knot group and the twisted Alexander polynomial. The results are as follows.
(1) We showed that 2-bridge knots are classified by the defining polynomial of parabolic representations of the knot group.
(2) We gave an affirmative answer to a conjecture of Dunfiled, Friedl and Jackson for a hyperbolic pretzel knot with length three.

研究分野：低次元トポロジー

キーワード：DFJ予想　双曲結び目　ねじれアレキサンダー多項式

１．研究開始当初の背景

3 次元多様体の基本群をよく知られた群に表現し，多様体の幾何的な情報を代数的にとり出す手法の一例として，ねじれアレキサンダー多項式が知られている．この不変量は結び目群（結び目補空間の基本群）の場合 X.S. Lin により，一般の有限表示群の場合は和田昌昭によって導入され，ここ 10 年程の間に応用面で大きく進展した．

Friedl-Vidussi は結び目群の剰余有限性に着目することで，結び目のファイバー性（結び目補空間に円周上の曲面束の構造が入る）と種数（結び目が張るザイフェルト曲面の最小種数）がねじれアレキサンダー多項式で決定されることを示した．しかしながら，この判定条件から具体的にファイバー結び目であることを示すことや，種数の情報を持つ表現を厳密に構成することは一般に難しい．

Dunfield-Friedl-Jackson は大規模なコンピュータ実験に基づき，3 次元球面内の双曲結び目（補空間に有限体積完備双曲構造が入る）のホロノミー表現（これは双曲結び目に対して一意的に定まる SL(2,C)-離散忠実表現である）に付随したねじれアレキサンダー多項式によって，双曲結び目のファイバー性と種数が決定できることを予想した（以下,「DFJ 予想」と呼ぶ）．

現在のところ，この予想が肯定的に確かめられている結び目のクラスは, 15 交点以下の 313,209 個の双曲結び目と，2 橋結び目の一種である，双曲的ツイスト結び目の無限系列のみである．

２．研究の目的

本研究の目的は，双曲的結び目の基本群の SL(2,C)-表現に付随したねじれアレキサンダー多項式の基本的性質を明らかにし，そこから得られる代数的性質を用いて，結び目の幾何学的性質を特徴づける枠組みを与えることである．

より具体的には，3 次元球面内の双曲結び目のファイバー性と種数に関する Dunfield-Friedl-Jackson 予想の解決に向けて，結び目群の SL(2,C)-指標代数多様体の適当なスライス（離散忠実表現を含む断面）と，ねじれアレキサンダー多項式の情報から，結び目のファイバー性と種数を決定することを目標とする．大別すると，次の 2 点

(1) 双曲的結び目の SL(2,C)-離散忠実表現に付随したねじれアレキサンダー多項式の明示公式

(2) 得られた多項式の性質と結び目のファイバー性および種数との関係

を明らかにすることが目標となる．

３．研究の方法

研究の目的欄で述べた 2 つの具体的な研究目標(1), (2)のうち, (2)は(1)の結果に大きく依存している．そこで，研究の初期段階から，一般的設定のもとで両者の考察を始めるのではなく，研究全体の見通しを良くするため, 適度な一般性を持つ性質の良い双曲結び目のクラスに対して(1)および(2)の研究を推進する．その様子を詳細に解析した後に，より一般の双曲的結び目へと扱う対象（結び目のクラス）を順次拡大していくという基本方針で研究を効果的に推進する．

４．研究成果

以下，当該研究期間に得られた研究成果を年度別に報告する．

(1) <u>2014 年度</u>．上述の研究目標に対して，本研究課題初年度の今年は，(1)に焦点を絞って研究を行った．特に，3 次元球面内の双曲的 2 橋結び目について詳しく考察し, Dunfield-Friedl-Jackson の意味での双曲的ねじれ多項式（ねじれアレキサンダー多項式が対称性を持つように正規化したもので，複素数係数の 1 変数ローラン多項式になる）の各係数が，代数的整数となる十分条件（これは 2 橋結び目を含む，より広範な小さい結び目と呼ばれるクラスについても成り立つ)，および, 各係数が実数となる十分条件を具体的に記述した．

命題の主張を正確に述べると次の通りである．

<u>命題 A</u>. K を 3 次元球面内の双曲結び目とする．

① K が小さい結び目ならば，双曲的ねじれ多項式の係数は，すべて代数的整数である．

② K(p,q) が $q^2 \equiv -1 \pmod p$ をみたす双曲的 2 橋結び目ならば，双曲的ねじれ多項式の係数は，すべて実数である．

また, 2012 年に出版済の論文で与えていた，トーラス結び目のトータルねじれアレキサンダー多項式の明示公式が成り立つ十分条件について，記述が不正確な箇所を修正した．

(2) <u>2015 年度</u>. 今年度は, 研究目標の(1)と(2)の橋渡しに係る部分に焦点を絞って研究を行った．より具体的には，双曲的 2 橋結び目の SL(2,C)-離散忠実表現を含むパラボリック表現（結び目のメリディアンの像のトレースが 2 となる SL(2,C)-表現）による，指標代数多様体のスライスを詳しく考察した．この研究の過程で，双曲的とは限らないすべての 2 橋結び目

に対して，その SL(2,C)-パラボリック表現の定義方程式（Riley 多項式と呼ばれる 1 変数の整係数多項式）を詳細に考察し，Riley 多項式の零点によって，2 橋結び目が‘ほとんど’分類できることを示した．

定理の主張を正確に述べると次のようになる．

<u>定理 B</u>. K_1, K_2 を 3 次元球面内の 2 橋結び目とする．もしそれらの Riley 多項式が等しければ，結び目群 $G(K_1)$と $G(K_2)$は同型であり，K_1 と K_2 は同値な結び目である．

この結果は，結び目群の剰余有限性（から導かれる Hopfian という性質）と次の定理の系として導かれる．

<u>定理 C</u>. K_2 の Riley 多項式が K_1 の Riley 多項式を割り切るならば，結び目群 $G(K_1)$から $G(K_2)$への全射準同型写像が存在する．

これらの成果は，いずれも創価大学の北野晃朗氏との共同研究に基づいている．

(3) <u>2016 年度</u>．今年度は，上述の研究目標に対して，(2)に焦点を絞って研究を行った．より具体的には，3 次元球面内の長さ 3 を持つ双曲的プレッツェル結び目について詳しく考察を行い，DFJ 予想の（SL(2,C)-指標代数多様体のパラボリック表現によるスライスの情報を用いた）新しい証明を試みた．この双曲的プレッツェル結び目については，コンピュータおよび数式処理ソフトを援用した数値計算による予想の検証のみがなされていた状況であった．本研究課題のもと，Kim-Kitayama-Morifuji による指標代数多様体の具体的計算結果（指標代数多様体の定義方程式系の具体的な記述）を用いることで，予想の厳密な証明の 1 つを与えることに成功した．

一方で，ファイバー結び目のモノドロミー写像を研究する観点から，閉曲面の写像類群の Nielsen-Thurston 理論（曲面の写像類の位相的な分類に関する理論）と 3 次元リーマン多様体のエータ不変量（スペクトル不変量）との関係についても研究を行った．特に，有限体上の射影的特殊線形群 PSL(2,q)を自己同型群に持つ Hurwitz 曲面（これは曲面の種数を固定した時に最も対称性の高いコンパクトリーマン面であることが知られている）の無限系列に対して，「可約性」と呼ばれるある種の位相的性質と，「エータ不変量の消滅」というスペクトルの非対称性との同値性を示した．

定理の主張を正確に述べると次のようになる．

<u>定理 D</u>. X を自己同型群が Aut(X) = PSL(2,q)となる Hurwitz 曲面とする．q が十分大きいとき Aut(X)のすべての元は可約写像類であり，それをモノドロミーとする写像トーラスのエータ不変量は消滅する．

この成果は，無限個の Hurwitz 曲面に対して，可約性とエータ不変量の消滅を結びつけた最初の結果である．

(4) <u>2017 年度</u>. 本研究課題最終年度の今年は，昨年度中に得られていた，プレッツェル結び目のねじれアレキサンダー多項式に関する研究成果を，学術誌に発表するために論文としてまとめ上げることに注力した．得られた定理を正確に述べると，次のようになる．

K を長さが 3 の双曲的プレッツェル結び目 P(-3,-3,-3)とする．K はファイバー結び目ではなく，種数が 1 であることが知られている．

<u>定理 E</u>. 双曲結び目 K に対して，ホロノミー表現に付随したねじれアレキサンダー多項式は次数が 2 のモニックでない多項式である．つまり，双曲結び目 K に対して Dunfield-Friedl-Jackson 予想は正しい．

また，具体例を中心に計算を進めることで，さらなる研究の発展を目指し課題の推進に努めた．さらに，研究期間全体を通じて得られた，本研究課題の成果について検証を行った．

５．主な発表論文等

（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計 3 件）

① <u>Takayuki Morifuji</u>, A calculation of the hyperbolic torsion polynomial of a pretzel knot, Tokyo Journal of Mathematics, 査読有, in press. DOI:10.3836/tjm/15021792665

② <u>Takayuki Morifuji</u>, A vanishing theorem for the eta-invariant and Hurwitz groups, Nagoya Mathematical Journal, 査読有, 228 巻, 2017, 114－123. DOI:10.1017/nmj.2016.55

③ <u>Takayuki Morifuji</u>, Representations of knot groups into SL(2,C) and twisted Alexander polynomials, Handbook of Group Actions (Vol. 1), Advanced Lectures in Mathematics, 査読有, 31 巻, 2015, 527－576.

〔学会発表〕（計 13 件）

① 森藤 孝之，On a conjecture of Dunfield, Friedl and Jackson for hyperbolic knots, 東京大学大学院数理科学研究科トポロジー火曜セミナー，2017 年.
② 森藤 孝之，双曲結び目の Dunfield-Friedl-Jackson 予想について，大阪大学理学研究科数学専攻談話会，2017 年.
③ Takayuki Morifuji，On Riley polynomial of 2-bridge knots，Analysis and Geometry Seminar, University of Pau (France), 2016 年.
④ Takayuki Morifuji, Twisted Alexander polynomials of hyperbolic knots and links (1), Fundamental Groups, Representations and Geometric Structures in 3-Manifold Topology, 広島大学, 2016 年.
⑤ Takayuki Morifuji, Twisted Alexander polynomials of hyperbolic knots and links (2), Fundamental Groups, Representations and Geometric Structures in 3-Manifold Topology, 広島大学, 2016 年.
⑥ 森藤 孝之，単純 Hurwitz 群と eta-不変量について，GD2016－微分同相群と離散群，強羅静雲荘，2016 年.
⑦ 森藤 孝之，2 橋結び目の Riley 多項式について，上越教育大トポロジーセミナー，2016 年.
⑧ Takayuki Morifuji, Twisted Alexander polynomial and its applications I: Alexander polynomial of a knot, Seminar Geometry, Topology and Dynamical Systems, University of Texas at Dallas (USA), 2016 年.
⑨ Takayuki Morifuji, Twisted Alexander polynomial and its applications II: Twisted Alexander polynomial, Seminar Geometry, Topology and Dynamical Systems, University of Texas at Dallas (USA), 2016 年.
⑩ Takayuki Morifuji, Twisted Alexander polynomial and its applications III: Applications, Seminar Geometry, Topology and Dynamical Systems, University of Texas at Dallas (USA), 2016 年.
⑪ 森藤 孝之, Hurwitz 曲面の自己同型の可約性と eta-不変量，日本数学会 2015 年度年会トポロジー分科会，明治大学，2015 年.
⑫ 森藤 孝之，Hurwitz 曲面の自己同型と eta-不変量について，研究集会「リーマン面に関連する位相幾何学」，東京大学，2015 年.
⑬ 森藤 孝之，双曲結び目の Dunfield-Friedl-Jackson 予想について，北海道大学幾何学コロキウム，2015 年.

６．研究組織

(1)研究代表者

森藤 孝之（MORIFUJI, Takayuki）
慶應義塾大学・経済学部・教授
研究者番号：90334466

(2)研究分担者

（　　　）

研究者番号：

(3)連携研究者

（　　　）

研究者番号：

(4)研究協力者

（　　　）