

**科学研究費助成事業 研究成果報告書**

平成 30 年 6 月 18 日現在

機関番号：15401

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2014～2017

課題番号：26400117

研究課題名(和文) 行列係数を持つ微分作用素の作用素解析とスペクトル解析

研究課題名(英文) Operator and Spectral Analyses for Differential Operators with Matrix-Coefficient

研究代表者

廣川 真男 (HIROKAWA, Masao)

広島大学・工学研究科・教授

研究者番号：70282788

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,700,000円

研究成果の概要(和文)：本研究課題では、次の二つの数理模型を考察した。(1)非可換調和振動子の模型の一つである(一般化された)量子ラビ模型を中心に、量子的効果を研究した。特に、回路量子電磁気学の観点から、その模型に対する作用素解析とスペクトル解析を行い、深強結合領域における束縛状態の様子を数学として明らかにした。一方、(2)量子細線で接合を挟んだ数理模型に対しては、ディラック粒子としての電子が接合をトンネルするときに、それぞれの波動関数が持つ位相因子とスピンの生じる影響を明らかにした。

研究成果の概要(英文)：In this research program, we considered the following two mathematical models. (1) We studied some quantum effects mainly for the generalized quantum Rabi model among non-commutative harmonic oscillator models. In particular, in the light of circuit QED, we made operator and spectral analyses for that model, and we mathematically clarified its bound state in the deep-strong coupling regime. Meanwhile, (2) for the model of the two quantum wires with a junction between the two, we clarified how the electron's wave function have a phase factor, and how the electron spin has an effect when the electron as a Dirac particle passes through the junction.

研究分野：数理物理学

キーワード：回路電磁気学 一般化された量子ラビ模型 ディラック粒子 接合を持った量子細線 深強結合領域

### 1. 研究開始当初の背景

状態空間を  $N$  次元ユニタリ空間と 2 乗可積分関数空間とのテンソル積からなるヒルベルト空間で与え、この状態空間に作用する行列係数を持つ微分作用素  $H$  に対し、行列係数の代数的性質や配位空間の幾何学的・トポロジカルな性質に応じた  $H$  の自己共役拡張の理論、その自己共役作用素のスペクトル解析などの理論構築を目的にしたのが当初の背景である。物理における具体例としては、対象とする一つの数理模型は、 $N$  次元ユニタリ空間に作用する  $N \times N$  行列で  $N$  準位(人工)原子のエネルギーを記述し、2 乗可積分関数空間に作用する調和振動子のポテンシャルを持つシュレディンガー作用素で共振器内の 1 モード光子のエネルギーを記述する。 $N=2$  のとき、これらの相互作用を記述する数理模型として非可換調和振動子の一例となる(一般化された)量子ラビ模型、また、スピンを持った電子をディラック粒子とし、この電子が 2 本の量子細線に挟まれた接合をトンネルするときのエネルギー作用素(ディラック演算子)を電子のトンネル接合模型として想定した。

### 2. 研究の目的

「1. 研究開始当初の背景」に記載した前者の人工原子と 1 モード光子の相互作用を記述する(一般化された)量子ラビ模型に対しては、そのスペクトル解析を行い、特に、原子と光子の相互作用が大きいときのエネルギー・スペクトルや束縛状態の解析が目的であった。また、「1. 研究開始当初の背景」に記載した後者の電子のトンネル接合模型に対しては、2 本の量子細線で接合を挟んだ配位空間において、ディラック粒子としての電子が接合をトンネルしたときのディラック演算子の作用素解析が、研究の主な目的であった。

### 3. 研究の方法

$N=2$  として(一般化された)量子ラビ模型に対しては、スピンのエネルギー演算子表現にパウリのスピン行列を用い、光子のエネルギー演算子表現には振動子表現を用い、これまで研究代表者らが研究して来た場の量子論における数学的手法を応用することで、作用素解析とスペクトル解析を行った。

電子のトンネル接合模型に関しては、行列係数を持つ微分作用素に対し、量子細線と接合とが作る境界に関わる問題を boundary triplet の枠組みで扱えるように理論を拡張し、作用素解析とスペクトル解析を行った。

### 4. 研究成果

本研究課題に対する研究成果の内容は大きく二つに分ける事ができるが、まずそれらの概略を記し、その後で各内容について具体的に記す。

(1)量子ラビ模型に対し、この模型を超伝導

回路上で実現した実験系をモデル化し、バイアスエネルギーが無い場合(従って、パリティ対称性を持つ)、原子と光子の結合定数がゼロのときは、量子ラビ模型は  $N=2$  超対称性を持つ量子力学を記述するのに対し、結合定数を無限大にする極限において、このモデルは超対称性の自発的破れを引き起こすことを証明し、この自発的破れはスピン・カイラル対称性がもたらすことを示した。当初この数学的証明をハミルトニアン**の強結合極限**における弱レゾルベント収束で示したが、この改良に成功しノルム・レゾルベント収束の意味で与えた。すると、原子と光子の結合が非常に強い深強結合領域では、上述の極限ハミルトニアンが有効ハミルトニアンとなり、各束縛状態の近似を与えるが、これにより基底状態はシュレディンガーの猫状態を成すエンタングルメント状態となることを示した。さらに、原子と光子の結合が強くなったときに光の場の 2 乗の項の影響が出て来るがこの影響により基底状態が纏う仮想光子の個数が増え、それを原子核理論のメゾン・ペア理論のくり込み手法(ボゴリューボフ-ホップフィールド変換)でくり込み、基底状態を裸の状態から物理的状态へと変換し、基底状態が纏う仮想光子から実光子へと転化する可能性を示した。

(2)電子のトンネル接合模型に対しては、1 次元の場合に、電子が接合をトンネルしない場合とする場合、さらにトンネルする場合に、電子の波動関数の境界条件に付く位相因子とその出現の仕方、さらには電子スピンへの影響を完全に数学として特徴付けた。

(1)に関する詳細:

量子ラビ(Rabi)模型のハミルトニアン  $H_{QR}$  は

$$H_{QR} = \frac{\hbar\omega_a}{2}\sigma_z + \hbar\omega_c\left(a^\dagger a + \frac{1}{2}\right) + \hbar g\sigma_x(a + a^\dagger)$$

で与えられる。また、このハミルトニアンに回転波近似を施したジェインズ-カミングス模型のハミルトニアン  $H_{JC}$  は

$$H_{JC} = \omega_a\sigma_+\sigma_- + \hbar\omega_c\left(a^\dagger a + \frac{1}{2}\right) + (\lambda^*\sigma_+a + \lambda a^\dagger\sigma_-)$$

で与えられる。ここで、

$\sigma_- \equiv (\sigma_x - i\sigma_y)/2$  (スピン消滅演算子)、

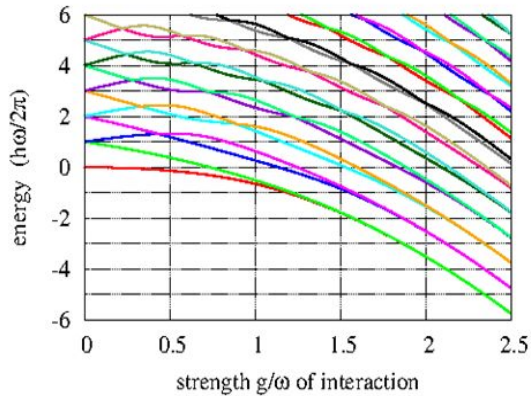
$\sigma_+ \equiv (\sigma_x + i\sigma_y)/2$  (スピン生成演算子)、

$a$ : 1 モード光子の消滅演算子

$a^\dagger$ : 1 モード光子の生成演算子

- $\sigma_{\#}$ : Pauli 行列,  $\# = x, y, z$
- $\omega_a$ : スピンのエネルギー遷移振動数
- $\omega_c$ : 1モード光子が作る波の振動数
- $g$ : 量子ビットとモード光子の間の結合定数

である。二つの振動数  $s$  と  $p$  を一致させると量子ラビ・ハミルトニアンを数値計算により求めると



となる。このエネルギーにおいて、結合定数  $g$  がゼロのときは  $N=2$  超対称性量子力学の特徴を表し、結合定数  $g$  が無限大になる極限ではこの超対称性が自発的に破れていることが示唆されている。二つの振動数  $s$  と  $p$  を一致させるとしたとき、雑誌論文 [Quantum Studies: Math. Found. 2, 379-388, (2015)]においてこの事実を証明したが、この超対称性の自発的破れを引き起こすのは、スピン・カイラル対称性であることが示された。すなわち、結合定数  $g$  を大きくして行くと、線形相互作用の回転項のみならず対向回転項の影響も大きくなるが、これは結合定数  $g$  が大きくなると、結合定数が小さいときはジェインズ-カミングス模型で良く近似されていた量子ラビ模型が対向回転項の影響を示すようになる事を意味する。この対向回転項はスピン・カイラル変換された状態空間においては回転項となる事実から、量子ラビ模型は、結合定数  $g$  が大きくなるにつれてスピン・カイラル対称性を持つ方向に移行し、このスピン・カイラル対称性を持った極限ハミルトニアンが自発的超対称性の破れを持つハミルトニアンとなる。数学として、雑誌論文 [J. Phys. A: Math. Theo. 50, 184003, (2017)]では、数学の一般論として弱レゾルベント収束がある条件下でノルム・レゾルベント収束という強い位相での収束になるという定理を証明し、この定理を量子ラビ・ハミルトニアンに応用する事でノルム・レゾルベント収束を示した。この位相の収束性により、量子ラビ模型のエネルギーに対する数値計算の結果が数学としても裏付けられる。

また、このノルム・レゾルベント収束で得られたハミルトニアンは、結合定数  $g$  が大き

いときに、量子ラビ・ハミルトニアンの良い近似を与えることを意味する。この数学的事実を用い、雑誌論文 [Phys. Rev. A 81, 042311 (2010)]で示したように、S. Ashhab と F. Nori が論文[Phys. Rev. A 81, 042311 (2010)]で示した結合定数が大きいときの束縛状態に対する公式が数学的に得られ、特に基底状態に対しては、シュレディンガーの猫状態を成す、スピン付きコヒーレント状態のエンタングルメント状態となることが分かる：

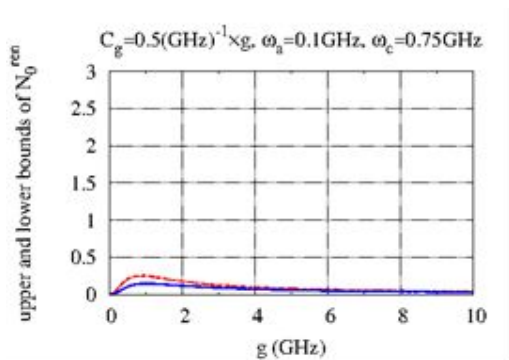
$$\frac{e^{-g^2/2\omega_c^2}}{\sqrt{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \frac{(g/\omega_c)^n}{\sqrt{n!}} |\downarrow, n\rangle + \frac{(-g/\omega_c)^n}{\sqrt{n!}} |\uparrow, n\rangle \right\}$$

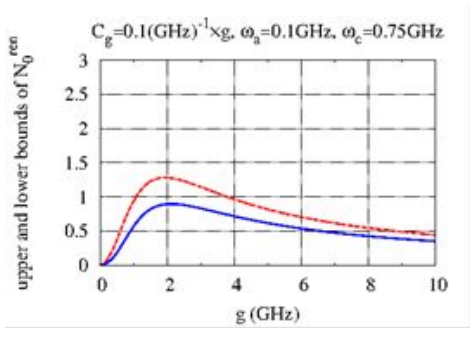
ただし、状態  $|\downarrow, n\rangle$  はスピン状態  $|\downarrow\rangle$  とフォック状態  $|n\rangle$  のテンソル積で、 $|\uparrow\rangle$  はアップスピン、もしくはダウンスピン、また  $n$  は光子数を表す。

結合定数が大きくなると、光子の場の2乗の項の影響を無視する事はできない：

$$H_{QR} + \hbar C g^2 (a + a^\dagger)$$

ただ、回路量子電磁気学(circuit QED)を超伝導回路上で実現する共振器量子電磁気学(cavity QED)の量子シミュレーションとみると、回路上で人工的に結合定数を制御できる点を活かし、光子場の2乗の係数も制御することができる。この光子場の2乗の項を考慮したハミルトニアンに対して、結合定数  $g$  を大きくして行くと、場のゆらぎも大きくなることを雑誌論文 [J. Phys. A: Math. Theo. 50, 184003, (2017)]で示したが、このゆらぎは仮想光子によるものであるため、仮想光子を纏った裸の状態としての基底状態から実光子を観るための物理的状态に移行する必要がある。この移行を原子核物理学のメゾン・ペア理論に従いくり込みの手法で求め、このようにして得られた物理的状态としての基底状態での光子数期待値  $N_0^{ren}$  を評価した。雑誌論文 [J. Phys. A: Math. Theo. 50, 184003, (2017)]では光子数期待値  $N_0^{ren}$  の上界と下界を求め上と下からの評価を与えたが、次の数値計算から分かるように、光子場の2乗の係数  $C$  がそう小さくないところでは、通常の場合の量子論に見られるように基底状態は真空であるが、光子場の2乗の係数  $C$  を十分小さく制御できると基底状態は一、二個の実光子を纏う可能性が見えて来る。





ここで、赤い破線が上界で、青の実線が下界である。

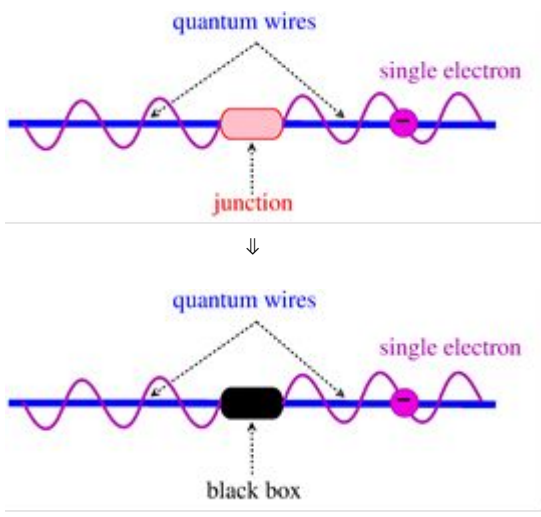
基底状態において真空のゆらぎを作り出す仮想光子から実光子への転化が生じ基底状態が実光子を纏っているのであれば、その実光子をどのように取り出すかの理論とその実験検証が意味を持って来る。例えば、動的カシミア効果はそのような手法の一つであるが、本結果で注目した基底状態は最低エネルギーの束縛状態であるので、緩和による光の放射は期待できない。従って、今後の課題としては、仮想光子から実光子への転化を観測するための新しいアイデアが必要となる。

(2) に関する詳細：

考えた電子の配位空間は、図のように2本の量子細線の間で接合を挟んだもので、数学として接合に任意性を持たせるためブラック・ボックス的に

$$= (-, -) (+, +)$$

と考えた。



電子をディラック粒子として扱い、そのエネルギーを表すハミルトニアン  $H_0$  をディラック演算子

$$H_0 = \sigma_x p + m \sigma_x$$

で与えた。ただし、 $p$  は運動量演算子で、 $m$  は電子の質量。このとき、ハミルトニアンが観測量となるために、数学として自己共役性

をみたさねばならないが、この自己共役性はディラック演算子の定義域に属する波動関数の細線と接合の間の境界条件で特徴付けられる。雑誌論文 で得られた結果は、自己共役性と電子の接合での反射・トンネルに対応した境界条件との間を1対1に特徴付けた。電子が接合をトンネルするときの波動関数の境界条件は

$$\vec{\psi}(+\Lambda) = B_\alpha \vec{\psi}(-\Lambda)$$

と書ける。ただし、 $B_\alpha$  は  $2 \times 2$  行列

$$B_\alpha = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \alpha_3 & \alpha_4 \end{pmatrix}$$

である。このときの  $\#$  のみたすクラスを完全に決定し、反射とトンネルを司るパラメータとの関係も明らかにした。さらに、これら  $\#$  から、境界条件に現れる位相因子と電子スピンへの影響も

$$B_\alpha = e^{i\theta} \begin{pmatrix} a_1 & ia_2 \\ ia_3 & a_4 \end{pmatrix}$$

となる関係式で与え、各パラメータを具体的に書き下すことに成功した。ここで、

$$\theta \in [0, 2\pi), \quad a_j \text{ は実数 } j = 1, 2, 3, 4,$$

で

$$a_1 a_4 + a_2 a_3 = 1$$

をみたす。

今後の課題としては、スピンをもったシュレディンガー粒子としての電子に対する同様な考察、さらには、多次元への拡張が期待される。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計 7件)

M. Hirokawa, A mathematical modeling of electron-phonon interaction for small wave numbers close to zero, 査読有, in the book edited by J. Dittrich, H. Kovarik, A. Laptev (Eds.), 373-400, EMS Series of Congress Reports Functional Analysis and Operator Theory for Quantum Physics. Pavel Exner Anniversary Volume (Europ. Math. Soc. Publ. House, 2017).  
[http://www.ems-ph.org/books/book.php?proj\\_nr=218](http://www.ems-ph.org/books/book.php?proj_nr=218)

M. Hirokawa, J. Møller, I. Sasaki, A Mathematical Analysis of Dressed Photon in Ground State of Generalized Quantum

Rabi Model Using Pair Theory, Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical, 査読有, vol.50, 184003 [20p], (2017).

<http://iopscience.iop.org/article/10.1088/1751-8121/aa677c/meta:jsessionid=A7F206C0A6CC181FC99BD7D8B33B8B8E.e3.iopscience.cld.iop.org>

M. Hirokawa, Duality between A Dark State And A Quasi-Dark State, Annals of Physics (N.Y.), 査読有, vol.377, 229-242, (2017).

<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0003491616303037>

M. Hirokawa, The Rabi model gives off a flavor of spontaneous SUSY breaking, Quantum Studies: Mathematics and Foundations, 査読有, vol.2, 379-388, (2015).

[https://link.springer.com/article/10.1007/s40509-015-0041-y?wt\\_mc=internal.event.1.SEM.ArticleAuthorAssignedToIssue](https://link.springer.com/article/10.1007/s40509-015-0041-y?wt_mc=internal.event.1.SEM.ArticleAuthorAssignedToIssue)

M. Hirokawa, F. Hiroshima, and J. Lorinczi, Spin-Boson Model through a Poisson-Driven Stochastic Process, Mathematische Zeitschrift 査読有, vol.277, 1165-1198, (2014).

<https://link.springer.com/article/10.1007/s00209-014-1299-1>

M. Hirokawa, F. Hiroshima, Absence of energy level crossing for the ground state energy of the Rabi model, Communications on Stochastic Analysis, 査読有, vol.8, 551-560, (2014).

<https://www.math.lsu.edu/cosa/8-4-08%5B419%5D.pdf>

M. Hirokawa, T. Kosaka, A Mathematical Aspect of A Tunnel-Junction for Spintronic Qubit, 査読有, Journal of Mathematical Analysis and Applications, vol.417, 856-872, (2014).

<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0022247X14002893>

〔学会発表〕(計 8件)

M. Hirokawa, Quantum simulation of atom coupled to Bose field(s), 2017年12月12日, 現象数理セミナー, 九州大学マス・フォア・インダストリ研究所.

M. Hirokawa, Possibility of Spintronic-Qubit Control Through Tunnel-Junction on Quantum Wire, BIT's 7th Annual World Congress of Nano Science & Technology 2017(国際学会), 2017年10月26日.

M. Hirokawa, A Quantum Simulation of Cavity Optomechanics, 2017年10月

3日, Math/Phys Seminar at Aarhus University (Denmark).

M. Hirokawa, Quantum simulation of the atom-light interaction, 2017年9月19日, Quantum Circle at the Doppler Institute (Czech).

M. Hirokawa, A Mathematical Analysis of Photon in Ground State of Generalized Quantum Rabi Model with the  $A^2$ -Term, International Workshop on Ultra-Strong Light-Matter Interactions: Theory and Applications to Quantum Information(招待講演)(国際学会), 2016年9月19日, University of the Basque Country (Spain).

M. Hirokawa, How is the ground state of the quantum Rabi model dressed with a real photon? Mathematical quantum field theory and related topics (招待講演)(国際学会), 2016年6月08日, 九州大学マス・フォア・インダストリ研究所.

M. Hirokawa, On the Hepp-Lieb-Preparata quantum phase transition for the quantum Rabi model, Technical Committee on Quantum Information Technology (量子情報技術研究会)(招待講演), 2016年5月31日, 高知工科大学.

M. Hirokawa, Quantum Phase Transition, Joint Mathematics and Physics Seminar (招待講演), 2016年3月17日, Aarhus University (Denmark).

〔図書〕(計 1件)

廣川真男, 数物系に向けた フーリエ解析とヒルベルト空間論, サイエンス社, 2017, 192.

〔産業財産権〕

出願状況(計 件)

名称:

発明者：  
権利者：  
種類：  
番号：  
出願年月日：  
国内外の別：

取得状況（計 件）

名称：  
発明者：  
権利者：  
種類：  
番号：  
取得年月日：  
国内外の別：

〔その他〕  
ホームページ等

#### 6. 研究組織

##### (1) 研究代表者

廣川 真男 (HIROKAWA, Masao)  
広島大学・大学院工学研究科・教授  
研究者番号：70282788

##### (2) 研究分担者

( )

研究者番号：

##### (3) 連携研究者

河備 浩司 (KAWABI, Hiroshi)  
岡山大学・大学院自然科学研究科・教授  
研究者番号：80432904

##### (4) 研究協力者

( )