

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 29 年 5 月 11 日現在

機関番号：15401

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2014～2016

課題番号：26400118

研究課題名(和文)非可積分ハミルトン系の接続問題の研究

研究課題名(英文)Study of connection problem for non-integrable Hamiltonian systems

研究代表者

吉野 正史 (Yoshino, Masafumi)

広島大学・理学研究科・教授

研究者番号：00145658

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,600,000円

研究成果の概要(和文)：ハミルトン系の第一積分の特異性を解析して、非可積分性が起こる構造と解の大域的性質をしらべた。このとき困難な点として、第一積分を構成するとき現れる発散、あるいは標準形への変換で現れる発散を意味づけて議論を行う必要があり、偏微分方程式に対する独立変数に関するポレル総和法やパラメータに関するポレル総和法を証明した。非可積分性の構造の解析に関しては、微分ガロア理論が必ずしも有効でない場合に大域的な非可積分性がおこるケースをしらべた。第一積分の大域情報が十分にわかっていないので結果はまた改良の余地があり今後の研究が必要である。

研究成果の概要(英文)：We study the structure of non-integrability of a Hamiltonian system and the global properties of solutions by using a singular first integral. The difficulty is to give the meaning to the divergent formal first integral or to the divergence of the normalizing transformation. We prove the Borel summability with respect to a certain parameter in the equation for first order system of partial differential equations. As for the non-integrability we show the semi-global non-integrability of a Hamiltonian system which is not analyzed by differential Galois theory. Because the global property of the first integral in the argument is not well understood, the result has the possibility to improve.

研究分野：関数方程式および力学系

キーワード：ポレル総和法 ハミルトン系 非可積分性 接続問題 モノドロミー Fuchsian equation 特異摂動
モーメント総和法

1. 研究開始当初の背景

純粋・応用の両面でハミルトン系は重要な方程式系であり多くの研究がなされてきた。この系が可積分でない場合、解の大域的性質は複雑になる。非可積分なハミルトン系の研究に関して、研究開始当時までに Ziglin 理論、ガロア理論の大きな進展があり、他方 Taimanov (Inv. Math. 2000) の第一積分の立場からの研究があった。これらを踏まえて非可積分系の研究を第一積分の系の解析接続をもとにして行うというアイデアで研究を開始した。これはポアンカレのアイデアとも関係が深い。発散級数の取り扱いに現代的な扱いが必要になる。この際に現れる発散を繰り返すため、ボレル総和法とそれを改良したモーメントボレル総和法を用いることを想定し、第一積分の解析接続とあわせて解析的な道具として用いることにして研究を開始した。この研究は不確定特異点での福原理論とも深い関係があり、当時発展しつつあった addition と middle convolution も関わってくるのが予想された。

2. 研究の目的

(1) 全体の目的。非可積分なハミルトン系の解の特異性を第一積分を用いて解析し、接続問題を研究することを全体の目的とした。より正確に、Taimanov (Inv. Math. 2000) の研究のアイデアあるいはポアンカレのアイデアを踏まえ、第一積分の特異性を解析して、非可積分性が起こる構造をしらべ解の大域情報を得ることを目的とした。

(2) 具体的な目標。第一積分を構成する議論では、形式的な意味しか持たない発散級数を議論の基礎として用いる必要があり、ボレル総和法により発散を繰り返す意味づけることを考えた。そのため、まず解析的な準備として、ボレル総和法を偏微分方程式に拡張したりボレル総和法をさらに拡張してモーメントボレル総和法理論を構築することを目標とした。このようにしてボレル総和法で構成された第一積分の解析接続の情報を手掛かりにして非線形接続情報 (Stokes 関数) と解の接続情報を得ることを次の目標とした。モーメントボレル総和法を用いることで特異性の情報が解析可能であるような表示を得ることが期待され、これは middle convolution による常微分方程式での最新の結果にも対応すると期待された。これらの帰結として接続情報が構成的に得られるほか、可積分性を示すことが困難な超多自由度生態系モデルなど新しい分野への応用も目標とした。

3. 研究の方法

(1) 研究は、申請者が中心になって、国内外の研究者と研究会や招へいを用いて情報交換をし、また広島大学の学振 PD の神本氏との議論も交えて実施された。1 年目は、偏微分方程式に対するパラメータに関する

ボレル総和法理論の整備を行い、それをもとにモーメントボレル総和法の基礎理論の構築を試みた。他方、ハミルトン系の非可積分性に関する Taimanov 理論の理解を深めるため、これと深いつながりを持つ Zampieri の非可積分性の研究の特異点が 2 つ以上ある場合に大域的な状況で行った。この場合、独立変数について方程式は必ずしも確定特異点でない場合も想定し、解析手法の開発を目標として研究した。2 年目は、モーメントボレル総和法理論の研究と非可積分性への応用を中心とした研究を行った。3 年目は、第一積分の解析接続の研究、ストークス関数の具体的な計算例の研究と非可積分性の構造の研究や応用について研究を行った。

(2) 研究を行うにあたり、セミナー等を利用した情報交換は理論を構成するうえで大切であり、以下のような体制で実施された。広島大学での研究集会の開催や通年で開催されるセミナーでの情報交換と議論。国内外の課題と関係した研究者の招聘と議論。京都大学、名古屋大学、熊本大学、芝浦工業大学で開催される研究集会への参加と情報交換。学振および博士課程の若手の研究者との定期的な討論。ポーランド、スペインでの国際会議に参加し、当該分野の研究者と研究情報を交換。これらで得られた情報を研究に生かし、申請者が単独で実行した。

4. 研究成果

(1) ボレル総和法について。(論文 参照) 我々の議論ではボレル総和法が第一積分の構成において必要である。第一積分はハミルトンベクトル場と関係するので、一階の方程式系に対するボレル総和法の拡張をまず研究した。偏微分方程式に対するボレル総和法は特別な例を除いてよくわかっているとは言えない状況であった。そこでまず 空間変数について 1 階のフックス型偏微分方程式系となる特異摂動パラメータを含むような系に対して、パラメータに関する形式級数の存在とボレル総和可能性を証明した。このようなパラメータに関するボレル総和可能性はたとえばロトカポルテラ捕食系に応用が見込める。その結果、空間変数が確定特異点の近傍にあるとき、パラメータに関する適当な角領域でボレル総和可能性を証明した。これはまた空間変数についてある種の不確定特異点を含む場合にも拡張可能であることが分かった。この論文ではそれらの大域的な解析接続可能性は議論されていない。次に においては、ベクトル場の標準形理論であられるものと類似の形式級数についてボレル総和可能性を考察した。これは一階の準線形偏微分方程式系に対するパラメータに関するボレル総和可能性の問題に帰着される。空間変数についてはポアンカレ条件を仮定してボレル総和可能性を証明した。ポアンカレ条件を外すことは今後の課題であるが小分母の問題が関係してくるので困難かもしれない。ボレル和の解析接続は今後の課題

である。これらの結果をモーメントボレル総和法に拡張することに関しては、部分的な結果を得てプレプリントを作成中であるがまだ問題は多く残されている。

(2) 非可積分性について。(論文 参照)
当該研究ではハミルトン系の第一積分の存在の十分条件を得ることや、第一積分が存在するとき、その特異性の性質を明らかにすることが重要である。実際これは非可積分性とも密接に関係する。論文 では2つの特異点を持つハミルトン系の解析的な非可積分性を示している。このハミルトン系はもともとは Gorni と Zampieri によって Taimanov の結果の解析版として提唱され研究されてきたものである。このようなハミルトン系の中には局所的には可積分であるにもかかわらず、大域的には可積分でないことが示されているものもあることが分かった。これは大域的な状況に特有の事実である。このため、遠く離れた特異点からの影響をとらえるような方法が必要であり、このような方法は Ziglin 理論、ガロア理論以外にはあまり知られていないようであり、これをどうするかはまだ今後の課題と思われる。

(3) モノドロミー、接続問題その他について。
以上の方法を接続問題等に応用していくのであるが、これについてはまだ部分的な結果を得たにとどまる。(論文 と を参照)ここではボレル総和法を用いることなく第一積分が構成可能なケースに限ってモノドロミーが計算されている。実際、考える方程式は、超幾何方程式系あるいはその非線形摂動の方程式系である。これに対してモノドロミーの具体的な表示を与えている。これらの方程式の場合、大域的な第一積分が容易に計算可能であるので、第一積分の特異性の接続の問題がないので、このプロジェクトのテーマの解決には程遠い。ボレル和が特異性を持つ場合にどのように接続情報を得るのかという問題は未解決である。この問題に対する予想される解答の一つはモーメントボレル総和法を用いることであり、それは準備中のプレプリントで一部結果が与えられる予定であるが、全体としてはまだ未解決でこれも今後の問題である。

<引用文献>

Bolsinov, A.V. and Taimanov, I.A.,
Integrable geodesic flows with positive
topological entropy, *Invent. Math.*, 140 巻
3号, 2000, 639-650

Gorni, G. and Zampieri, G.,
Analytic-non-integrability of an integrable
analytic Hamiltonian system, *Differ.*
Geom. Appl. 22 巻, 2005, 287-296

5. 主な発表論文等
(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計5件)

吉野正史, Monodromy of confluent hypergeometric system of Okubo type, *RIMS Kokyuroku Bessatsu*, 査読有, 57 巻, 2016, 281-296,
<http://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/>

吉野正史, 佐々木良勝, Nonintegrability of Hamiltonian system perturbed from integrable system with two singular points, *Math. Zeitschrift*, 査読有, 284 巻, 2016, 1005-1020
DOI: 10.1007/s00209-016-1684-z

吉野正史, 山澤浩, Parametric Borel summability of some semilinear system of partial differential equations, *Opuscula Mathematica*, 査読有, Vol. 35, No. 5, 2015, 825-845,
<http://www.opuscula.agh.edu.pl/>

吉野正史, Analytic continuation of Borel sum of formal solution of semilinear partial differential equation, *Asymptotic Analysis*, 査読有, 92 巻, 2015, 65-84
DOI: 10.3233/ASY-141270

吉野正史, Semi-formal solution and monodromy of some confluent hypergeometric equations, *RIMS Kokyuroku Bessatsu*, 査読有, 52 巻, 2015, 255-262,
<http://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/>

[学会発表](計11件)

吉野正史, Blowup of wave equation and Birkoff theory of some Hamiltonian system, *A Life in Mathematics Generalized functions, Microlocal analysis, PDEs and Dynamical systems*, 2017年2月1日, トリノ(イタリア)

吉野正史, Moving singularity and monodromy of some Hamiltonian system, 日本数学会秋季総合分科会, 2016年9月15日, 関西大学(大阪)

吉野正史、Parametric Borel summability of first order partial differential equation not satisfying the Poincare condition、FASPDE16、2016年8月31日、リスボン(ポルトガル)

吉野正史、Application of Borel summability to small denominator problem、日本数学会年会、2016年3月16日、つくば大学(つくば市)

吉野正史、Semi-global non integrability of Hamiltonian system and Borel summability、Algebraic Analytic Methods、2015年12月11日、RIMS(京都)

吉野正史、Monodromy of some resonant Hamiltonian system、Microlocal Analysis and Singular Perturbation Theory、2015年10月05日、RIMS(京都)

吉野正史、Borel summability of formal solutions of first order system of PDE、Analytic, Algebraic and Geometric Aspects of Differential Equations 2015、2015年9月16日、ベデルボ(ポーランド)

吉野正史、ある半線形偏微分方程式系の形式解のボレル総和法、日本数学会年会、2015年3月21日、明治大学(東京)

吉野正史、形質進化を伴う3種系の挙動、日本数学会年会、2015年3月21日、明治大学(東京)

吉野正史、Nonintegrability of Hamiltonian system perturbed from integrable system with two singular points、日本数学会年会、2015年3月21日、明治大学(東京)

吉野正史、Semi-formal theory and formula of monodromy、Formal and Analytic Solutions of Functional Equations 2014、2014年9月3日、Valladolid(スペイン)

〔その他〕
ホームページ等
<http://home.hiroshima-u.ac.jp/yoshinom/>
6. 研究組織
(1) 研究代表者
吉野 正史 (YOSHINO, Masafumi)
広島大学・大学院理学研究科・教授
研究者番号：00145658