

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 30 年 6 月 7 日現在

機関番号：17102

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2014～2017

課題番号：26400120

研究課題名(和文)作用素平均とその関連分野の研究

研究課題名(英文)Study on operator means and related topics

研究代表者

幸崎 秀樹 (KOSAKI, Hideki)

九州大学・数理学研究院・学術研究者

研究者番号：20186612

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,800,000円

研究成果の概要(和文)：各種平均の強い意味(すなわち正定値性および無限分解可能性の意味)での大小関係の比較定理を得た。特に二項平均また更に一般的なStolarsky平均等のパラメータに関する単調性を示すことに成功した。これにより関連する各種作用素平均に関する多くの新しいノルム不等式を示す事に成功した。

定義域に様々な制限を付けた上での、非有界正定値自己共役作用素に対する並列和の研究は、世界各地で従来から行われてきた。今回の研究で定義域に全く制限を付けない場合の並列和の満足のいく理論を得ることができた。これによりこのような一般的な非有界正定値自己共役作用素に対する絶対連続性の研究の足掛かりが得られた。

研究成果の概要(英文)：Some comparison results (in strong sense such as positive definiteness and/or infinite divisibility) for various means were proved. For instance monotonicity (in parameters) for binomial and more generally Stolarsky means was obtained. As a consequence many new norm inequalities for related operator means were established. Several notions of parallel sums for unbounded positive self-adjoint operators have been studied by some groups with certain additional domain conditions. A satisfactory theory free from any domain conditions was developed in our study. This theory seems to be a useful device for study of absolute continuity for general positive self-adjoint operators.

研究分野：数物系科学

キーワード：作用素平均 作用素ノルム不等式 正定値関数 並列和 非有界作用素 絶対連続性

1. 研究開始当初の背景

(1) 1951年に発表された E. Heinz による分野の古典とも言える論文において、ヒルベルト空間の正作用素 H, K の分数冪(及びも一つの作用素 X)を含むノルム不等式

$$\|H^{1/2} X K^{1/2} + H^{1/2} X K^{1/2}\| \leq \|HX + XK\| \quad (0 \leq \theta \leq 1)$$

が示された。この論文では $\|\cdot\|$ は作用素ノルムであったが、20年程前に実はこの不等式は任意のユニタリ不変ノルムに関しても成立することが示され、今日では何通りもの証明が知られている。特に $\theta = 1/2$ の場合には

$$2\|H^{1/2} X K^{1/2}\| \leq \|HX + XK\|$$

となり、ユニタリ不変ノルムに関する(ある種)作用素版相乗・相加平均不等式と見なせる。これらの研究に触発され、更に一般的な作用素平均の研究、特にそれらのノルムの比較の研究が世界各地の研究グループで活発に行われるようになった。スカラーに対する様々な意味での「平均」が知られているが、相乗、相加平均のように形が単純なものについては、その作用素版がどうあるべきかを想像するのは比較的容易である。(実際はこの点に関して、状況はそう単純ではない。)しかし、更に一般的な平均に対応する「作用素平均」の定義がどうあるべきかという問題はそれ程明らかではない。

日合文雄氏(元東北大情報、現名誉教授)と代表研究者は以前共同研究を行い、作用素平均の(一つの)一般論を構築し、2003年に Springer のレクチャーノートとして発表した。ここで提唱された作用素平均の定義は旧ソ連の研究グループにより開発された Stieltjes double integral 変換の理論に基づいており、これは行列どうしの Schur 積の概念の無限次元版また連続版とも言えるものである。我々の一般論で行われた主な点を以下に説明する。

まず「作用素平均」の公理的定式化を実行し、研究対象をはっきりさせた: すなわち scalar に対する(自然な) mean $M(s, t)$ のクラスを設定する。このクラスの $M(s, t)$ から出発して対応する作用素平均 $M(H, K)X$ を (Stieltjes double integral 変換を用いて) 構成する。

次に、もちろん二つの作用素平均 $M(H, K)X$ および $N(H, K)X$ の間に Heinz 不等式のようなノルム不等式が成立するかどうかを調べたい訳であるが、その為の判定条件を確立した。我々の得た結論は、二つの (scalar) mean から自然に生じる関数比 $M(e^t, 1)/N(e^t, 1)$ が正

定値関数になる事とノルム不等式が成立する事の同値性である。例えば上の Heinz 不等式は丁度双曲線関数比 $\cosh(\theta x)/\cosh(x)$ の正定値性に対応している。

我々の公理的取扱により、研究対象となる作用素平均のクラスが格段に広がった。また作用素平均のクラスを適切に設定した為、ノルム不等式の成立ばかりでなく、非成立のチェックも可能となった。これにより、各種パラメータを含む従来の作用素ノルム不等式の研究が大きく前進した。

(2) 正定値行列または正作用素 H, K の対する並列和 $H:K$ は(例えば可逆な場合には)

$$H:K = (H^{-1} + K^{-1})^{-1}$$

と定義される。これは作用素論において有用な概念であり、例えば(久保-安藤の意味での)作用素平均の理論においては基本的な道具となっている。これは抵抗が並列に接続された電気回路の合成抵抗に対応する考え方であり、 $H:K$ に対応する quadratic form (すなわちベクトル x に対する内積値 $((H:K)x, x)$) に対しては variational 表示

$$(*) ((H:K)x, x) = \inf\{(Hy, y) + (Kz, z); y+z=x\}$$

が知られている。これは並列抵抗を持つ電気回路に対してエネルギーが最小になるように電流が流れるという Kirchhoff 原理に対応する極めて自然でまた数学的にも有用な表示である。研究代表者はこの考えに基づき、作用素環理論の枠組みでの WYDL 凸性・荒木不二洋氏の相対エントロピー等に関する研究を行った経験をもつ。これらの研究では相対モデューラ作用素と呼ばれる非有界作用素が必要となり、その並列和もどきが登場する。このような事情により、研究代表者はずっと以前から非有界作用素の場合の並列和の理論を整備する事の重要性を痛感していた。

2. 研究の目的

上で説明した背景に基づき、主な研究目的として以下のような点をあげていた。

(1) 各種作用素平均に対するノルム不等式を得るために多くの関数の正定値性の判定結果を蓄積してきたが、更なる判定結果の蓄積を行う。更に多くの新しいノルム不等式を示したいからである。Fourier 変換が計算できる場合は Bochner の定理を利用して正定値性判定を行うというのが常道である。しかし、Fourier 変換の計算が望み薄な場合でも、更

に強い無限分解可能性(任意の正冪が正定値関数)を示すという形で解決が可能が多々ある。無限分解可能性を調べるための道具がある程度整備されているからである。この手法の有用性を検証するため、関連関数の無限分解可能性に関する結果をも蓄積したい。

(2) 今まで実行した計算によれば、我々の理論に現れる多くの関数は、正定値ならば自動的に無限分解可能となる事が多い。これは予想していなかった不思議な現象である。これがどの位一般的な事実であるのか、また何を意味するのかを解明したい。ノルム不等式成立の為に、正定値性で十分であるのに、実は無限分解可能となるのだから、何らかの更に深い構造が背後に隠れている可能性もある。

(3) 正定値自己共役作用素を対応する quadratic form としてとらえ、quadratic form の一般論を駆使して非有界の場合の並列和の理論の構成を目指す。有界作用素に対する安藤毅氏の絶対連続性の研究は興味深いものであるが、これは並列和の理論に基づいている。非有界作用素の場合の満足のいく並列和の理論が構築されれば、この場合の絶対連続性の研究も前進するものと期待される。例えばラドン・ニコディム型定理、2つの作用素の同時絶対連続性等の詳しい研究を行いたい。

3. 研究の方法

(1) Fourier 変換を具体的に計算してその正値性を調べるという標準的方法による正定値性の判定(Bochner の定理)はかなり多くの関数に関して実行してきた。しかし、幾つかの重要な作用素平均のクラスに対しては Fourier 変換の具体的な計算が絶望的である。無限分解可能性は正定値性より強い概念ではあるが、確率論で有用な概念であり幸いにもその研究の道具がある程度整備されている。これを利用した研究を行った。特に、Lévy-Khintchine 型 (と言うより Kolmogorov 型)積分表示に現れる測度を具体的に計算するという手法で研究を実行した。

(2) H, K が非有界正作用素の場合でも「逆作用素」 H^{-1}, K^{-1} 等の(non-dense な定義域をもつ quadratic form として)しかるべき意味付けを行えば、(定義域の異なる作用素の場合にも)並列和 $H:K=(H^{-1} + K^{-1})^{-1}$ の定義は可能である。有界正作用素に対する並列和の理論では variational 表示 $(*)$ が基本的であるのに対して、非有界の場合にはこれが成り立たないという不都合が生じる。このような現象の詳しい解析またその困難

さの解消には、昔の加藤敏夫、B. Simon 等による quadratic form の可閉性に関する研究を利用した。

4. 研究成果

二項平均のパラメータに関する強い意味での単調性はパラメータの特別な値に対してはすぐに分かる。しかし、一般には関連する Fourier 変換がほぼ計算不可能であり、単調性が常に成立するかどうかは研究開始当初より謎であった。無限分解可能な関数かどうか調べるというアイデアの導入により、この問題を遂に肯定的に解決する事ができた。同じ考え方で更に一般的な Stolarsky 平均等も取り扱うことが可能であり、この考え方の応用として得られた結果をまとめて論文として発表した。また研究論文 では、関連する精密なパラメータを含む作用素ノルム不等式がどの範囲で成立するか完全に決定した。

一方、非有界作用素に対する並列和に関しては、定義域に何の仮定も課さない一般的な状況の下での理論を研究論文 で提唱した。正の有界作用素の絶対連続性に関しては、安藤毅氏による綺麗な特徴付けが知られている。非有界の場合の我々の理論の典型的応用として、この特徴付けの非有界の場合への自然な一般化に成功した(論文)。

研究分担者綿谷氏は共同研究者と共に様々な力学系から自然に生じる作用素環に研究を前進させた。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計 8 件)

H.Kosaki,
Absolute continuity for positive self-adjoint operators,
to appear in Vol. 72 of Kyushu J. Math.,
査読有.

T.Kajiwara and Y.Watatani,
Maximal abelian subalgebras of C^* -algebras associated with complex dynamical and self-similar maps,
J. Math. Anal. Appl., 査読有, 445(2017),
1383-1400.

H.Kosaki,

Parallel sum of unbounded positive operators,
Kyushu J. Math., 査読有, 71(2017),
387-405.

T.Kajiwara and Y.Watatani,
Ideals of the core of C^* -algebras
associated with self-similar maps,
J. Operator Theory, 査読有, 75(2016),
225-255.

H.Kosaki,
A certain generalization of the Heinz
inequality for positive operators,
Internat. J. Math., 査読有, 2016 (2016),
1650008 (17p).

M.Enomoto and Y.Watatani,
Strongly irreducible operators and
indecomposable representations of quivers
on infinite-dimensional Hilbert spaces,
Integral Equations Operator Theory, 査読
有, 83(2015), 563-587.

T.Kajiwara and Y.Watatani,
Traces on cores of C^* -algebras with self-
similar maps,
Ergodic Theory Dynam. Systems. 査読有,
34 (2014), 1964-1889.

H.Kosaki,
Strong monotonicity for various means,
J. Funct. Anal., 査読有, 267 (2014).
1917-1958.

〔学会発表〕(計 0 件)

〔その他〕

特になし

6 . 研究組織

(1)研究代表者

幸崎 秀樹 (KOSAKI, Hideki)
九州大学・数理学研究院・学術研究者
研究者番号 : 20186612

(2)研究分担者

綿谷 安男 (WATATANI, Yasuo)
九州大学・数理学研究院・教授
研究者番号 : 00175077