

## 科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 29 年 8 月 30 日現在

機関番号：32660

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2014～2016

課題番号：26400124

研究課題名(和文)多様体上の解析学の研究

研究課題名(英文)Study of the Analysis on Manifolds

研究代表者

古谷 賢朗 (Furutani, Kenro)

東京理科大学・理工学部数学科・教授

研究者番号：70112901

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,700,000円

研究成果の概要(和文)：(1) Clifford代数に付随するベキ零Lie環(pseudo H-type Lie 環)に関して、整構造の存在、分類、及びその上のsub-Laplacianのspectral zeta関数に関する結果を得た。(2) 高階のGrushin作用素のGreen核を二つの方法で具体的に表示した。(3) Submersionを通じて互いに関連するsub-LaplacianとGrushin type作用素の陪特性流について、同次関数の第一積分の関連性について、擬微分作用素の理論枠組みで論じた。(4) Gromoll-Meyer異種球面に余次元3のsub-Riemann構造が存在することを示した。

研究成果の概要(英文)：(1) We proved the existence of integral lattices in the Lie groups attached to Clifford algebras and their admissible modules and classified them corresponding to minimal admissible modules. Also we studied the spectral zeta function of the sub-Laplacians on some of their Lie groups and their compact quotients by lattices which we proved the existence. (2) We constructed Green kernels for higher step Grushin operators coming from sub-Laplacians on higher step nilpotent Lie groups (Carnot groups) by two different methods. (3) A relation of the homogeneous first integrals of a sub-Laplacian and the related Grushin type operator through a submersion was proved in the framework of the pseudo-differential operator theory. (4) We constructed a codimension 3 sub-Riemannian structure on the Gromoll-Meyer exotic 7 sphere.

研究分野：数学

キーワード：関数解析学 大域解析学 non-holonomic structure 劣楕円型作用素 Grushin type operator spectral zeta function heat kernel 国際共同研究

## 1. 研究開始当初の背景

Dirichlet 問題のように物理的状況に密接に関連する事柄等をモデルに楕円型微分作用素の解析的理論は 20 世紀前半深く研究され、又無限次元空間の数学的取り扱いを明確に体系化した関数解析学の発展にも深く関連しつつこの 1 世紀発展して来た。更に 20 世紀後半はより一般の擬微分作用素や Fourier 積分作用素の理論の発展と共に特に幾何学、中でも多様体構造との深い関係が次々と発見されて、その研究は今日も様々な分野との関連のもと盛んに研究されている。この様な歴史的背景のもと、本研究は楕円型よりももう少し弱い性質で特徴づけられる劣楕円型作用素、特に sub-Laplacian の大域研究を目標とした。Laplacian は Riemann 構造によって定義され、いつでも存在し得るが、この作用素は大域的に非自明なものがどの多様体にも存在するとは限らない。その存在を保証する構造は完全非 holonomic と言われる性質を持つ部分束が接束に存在する場合である (通常この部分束に内積を考えて、sub-Riemann 構造と言われている)。この構造は葉層構造 (= foliation) の対局に位置し、両者が関連する場合もあるが、まだその方向の研究は進んでいない。又、多様体のある物理状態の形態空間と見たときには、この構造は運動の方向に一定の制限 (= 非 holonomic 部分束の方向) がある状態であり、その下で、区分的に滑らかにどの状態にでも移り得ることがすでに 1930 年頃には示めされている (Chow の定理)。対応する解析的な基礎定理は存在する sub-Laplacian が sub-elliptic estimates を満たしていることである (Hörmander の定理、1967 年)。これらの性質は幾何学的にも解析的にも少し弱い Riemann 多様体と楕円型作用素の理論の基本性質にほぼ対応し、可能な類似の現象の研究のみならず、楕円型理論では現れない新たな現象も多々ある。又最近活発に研究されているコントロール理論の理論的な基礎でもある。研究の出発としては当然よく知られた多様体 (異種球面も含む球面や一般の対称空間、Lie 群、Brieskorn 多様体等) が非自明な sub-Riemann 構造を持つかどうかの研究が一つの始まりであり、前回の科研費研究でも特に球面の場合に Clifford 代数の作用との関連でその構成を研究した。又ベキ零 Lie 群の様にその構造のモデルでもある場合の sub-Laplacian の研究も解析学の基本的な問題として出発した。これに関しては Beals-Gaveau-Greiner 等による 2-step ベキ零 Lie 群上の sub-Laplacian の熱核を complex Hamilton-Jacobi method による幾何学的構成が際立った結果であり、本研究もその結果が一つの追求すべきモデルと考えているが、compact な sub-Riemann 多様体上の sub-Laplacian の熱核の具体的な構成は一般的には易しくない。Beals-Gaveau-Greiner の熱核表示式に従えば 2-step ベキ零 Lie 群上の不変な sub-

Laplacian に対しては、その compact ベキ零多様体のスペクトルの具体的な決定も場合によっては可能である。そこでそれが可能であるはずの例として pseudo H-type 群の場合についての研究を始めた。この群は二次形式が一般符号である Clifford 代数から構成され、先駆する A. Kaplan 等の正定値の場合の研究を拡張するものでもあり、本研究は前回の科研費研究の継続である。

## 2. 研究の目的

(1) Clifford 代数とその許容加群 (= admissible module : 4. 研究成果の項で説明する) から構成される一群のリー環 (pseudo H-type Lie 環、群) は sub-Riemann 構造を持つ多様体の典型例を与えるが、一様離散部分群の存在は sub-Riemann 構造を持つ "compact" ベキ零多様体を構成する基本構造なのでその存在証明を目的とした。又それらの Kac 問題への応用を見込んで分類と sub-Laplacian のスペクトルの決定も目標にした。

(2) これら (1) での sub-Riemann 構造は 2-step である。高次 step の sub-Riemann 構造の解析的な問題の研究は、例えば quartic oscillator の研究の様に空間変数が小さくても具体的な結果を得ることは容易でない。そこで高次 step のベキ零 Lie 群上 (ここでは特に Carnot 群) の sub-Laplacian から構成される Grushin 作用素についてその Green 核の特殊関数による積分表示を得ることを目標とした。

(3) 研究期間中派生した新たな問題として、submersion を通じて定義される、全空間上の sub-Riemann 構造に付随する sub-Laplacian と底空間上に定義される Grushin type 作用素の陪特性流の完全積分可能性の対応関係を明らかにすることも目標とした。これは Riemann 多様体の場合の測地流の完全積分可能性の研究の一端に対応する問題であり次期の研究の為の予備的な事柄の研究を目的に加えた。

これら本研究の目標は、単なる存在証明や、一般性質の解明に止まらず、"具体的な計算結果"、"具体的表示・構成" 等を目標にしている。

## 3. 研究の方法

理論研究としての方法の最も求められることは自らの想像力の限りを尽くし、また地道な計算・推論を積み重ね一定の方向性や結論に至り、その上で共同研究者や同じ方面の専門家との討議、アイデアの交換等を通じて研究の進展を追求することである。その為に、研究費のうち旅費が多くを占めることは必然であるが、必要に応じた下記のような出張、招聘を通じて連携研究者、共同研究者との討議を経て効果的な研究発展に使用することが出来た。数学的な方法は上記問題毎に異なる。

(1) では構造の不変量を見つけることであり、結果的には各 Clifford 代数に含まれるある種類の対合による許容加群の同時固有空間分解に基づいた。

(2) では扱う 2 階の微分作用素 (Grushin 作用素) の特性を表す大域的な座標表示を見つけることが出発で、それを通じて古典的な特殊関数論の中で有用な公式、例えば変形 Bessel 関数に関する色々な事柄が役に立つことを見て取った。

(3) については擬微分作用素の理論がこの問題の研究に本質的であることが分かった。

上記 (1) の研究遂行の為に、2014 年夏にノルウェー・ベルゲン大学を訪問し海外共同研究者の Irina Markina 氏と研究の基礎付けの為に討議を行なった。その後 2015 年 5 月には同氏と共に同大学の Alexander Vasiliev 氏を本学に招聘し関連する問題の研究会を開催し、続いて 2015 年 8 月には本研究代表者の古谷が同大学に一ヶ月滞在し、同氏等と共同研究を行い最初の段階の分類の完成に至った。又一様離散部分群の存在証明の別角度からの取り組みも議論し一定の結論を得た (特に [雑誌論文] の項の ③、⑤)。

上記 (2) は前回の科研費研究以来連携研究者の岩崎氏との討議を経て、海外共同研究者の W. Bauer 氏がミュンヘン大学 (Maximilian Univ. Munich) 在籍中に同大学を訪れ、重要部分の完成に至った ([雑誌論文] の項の ⑦、⑧)。又 (2) 及び (3) に関連する研究のために W. Bauer 氏を 3 年間の研究期間中毎年授業等にお互い障害のない程度にそれぞれ 1 週間から 10 日程度招聘した。代表者古谷も期間中各年度 1、2 度 10 日から 3 週間程度訪問し共同研究を進展させることが出来た。又科研費補助での学会発表、研究会講演を国内および複数の国で必要に応じて行い研究成果の周知に努めたが、それらの活動を通じて新たな知己や進展を得、更なる研究の展開につながった。

#### 4. 研究成果

以下 ○ に数字は「5. 主な発表論文等」の欄に記載した論文の番号を示す。

(1) 符号  $(r, s)$  の非退化対称二次形式  $Q_{(r,s)}$  による (実) Clifford 代数  $Cl_{r,s}$  の、許容加群  $V$  から構成される 2 step ベキ零 Lie 環を  $\mathcal{N}_{r,s}(V) \cong V \oplus \mathbb{R}^{r,s}$  と表し、pseudo H-type Lie 環 (或は Lie 群) と呼ぶ。最小次元の許容加群は唯一つとは限らないがその場合の Lie 環は同型になるのでここでは簡単の為に  $\mathcal{N}_{r,s}$  と書くことにする。ここで許容加群とは、Clifford 代数の生成元の作用が歪対称となる非退化対称二次形式を持つ加群と定義される。規約加群は必ずしも許容加群ではない。  $Q$  がその様な二次形式ならば  $-Q$  も条件を満たす。最小次元の許容加群のみを扱っている場合は  $\pm Q$  を区別する必要はないが、多重和から構成された pseudo H-type Lie 環

(従って群も) を取り扱う時はそれも区別する必要がある。

符号  $(r, s)$  に関する分類が基本であるが、先ず pseudo H-type Lie 群に一様離散部分群が存在することを一般的に 3 通りの方法で証明し ([雑誌論文] ⑨, ⑤, ②)、最小許容加群から構成された pseudo H-type Lie 環の分類を完成した ([雑誌論文] ③)。

⑨ではこの Lie 環の分類の基礎となる構造も発見した。⑤では組み合わせ論への応用も一部含んでいる。②では半単純群との関係で一様離散部分群の存在問題を取り扱った。

Clifford 代数の許容加群は完全可約で最小次元の許容加群の直和に分解される (規約分解ではない)。③で与えた分類結果を表にまとめておく。この結果は一般の許容加群から構成された場合の完全分類を研究する為の基礎でもある。但し、 $\mathcal{N}_{r,s}$  と  $\mathcal{N}_{r',s'}$  が同型になり得るのは  $(r', s') = (s, r)$  の場合だけである。以下の表と  $(r, s)$  に関して、 $(8, 0)$ ,  $(4, 4)$  及び  $(0, 8)$  の 3 つの周期性から全て場合が分かる。例えば  $(r, s)$ ,  $(s, r)$  の組みと  $(r+4, s+4)$ ,  $(s+4, r+4)$  の組みは状況 (同型なら同型、次元が半分なら半分) が同じである。

8	≅	≅	≅	h					
7	d	d	d	≠					
6	d	≅	≅	h					
5	d	≅	≅	h					
4	≅	h	h	h	○				
3	d	≠	≠	○	d	d	d	≠	d
2	≅	h	○	≠	d	≅	≅	h	≅
1	≅	○	d	≠	d	≅	≅	h	≅
0		≅	≅	h	≅	h	h	h	≅
$s/r$	0	1	2	3	4	5	6	7	8

表中の記号の説明:  $s/r$  は Clifford 代数を生成する二次形式の符号で  $s$  が負の次元。  $r > s$  のペアに対して  $h$  は  $\dim \mathcal{H}_{r,s}$  が  $\dim \mathcal{H}_{s,r}$  の半分、逆に  $d$  は  $\dim \mathcal{H}_{r,s}$  が  $\dim \mathcal{H}_{s,r}$  の倍を意味する。この場合は当然同型でない。  $\cong$  は  $\dim \mathcal{H}_{r,s}$  と  $\dim \mathcal{H}_{s,r}$  が同型。  $\neq$  は  $\dim \mathcal{H}_{r,s}$  と  $\dim \mathcal{H}_{s,r}$  は一致するが同型でない。

最小許容加群でない一般の許容加群から構成された pseudo H-type Lie 環の完全分類は次期の研究で完成する。

(2) 高次のベキ零 Lie 群 (Carnot 群) 上の左不変 sub-Laplacian から自然に descend される作用素 (Grushin type 作用素) の Green 核を具体的に構成した ([雑誌論文] ⑦, ⑧)。ここでの方法では熱核そのものの構成は出来ない。又奇妙なことに二次元の場合は扱えない。

(3) ⑥において、⑨での一様離散部分群の存在をもとに Beals-Gaveau-Greiner による熱核積分表示を用いて sub-Laplacian と Laplacian のスペクトル

を一部の次元の低い場合に決定した。次期の研究では全ての場合にそれを決定し Kac 問題をこの範疇の多様体の中で最終的に扱う。

他の成果は、

(4) Sub-Laplacian と Grushin type 作用素の同次関数である第一積分の対応は submersion を通じて擬微分作用素の言葉で自然に取り扱えることを示し、いくつかの低次元の場合の完全積分可能性が対応している例を具体的に決定した ([雑誌論文] ①, ④)。

(5) Gromoll-Meyer 異種球面に余次元 3 の sub-Riemannian 構造が入ること証明し、現在投稿中である。7 次元異種球面で主束の底空間として実現されるのはこの場合だけであり 2 重主束構造を用いて構成した。この場合の異種球面を含む Brieskorn 多様体には接触構造 (余次元 1 の sub-Riemann 構造) が構成されている。残りの異種球面や、一般の Brieskorn 多様体に余次元が高い sub-Riemann 構造の構成可能性は次期の研究課題の一つである。

5. 主な発表論文等 (研究代表者及び連携研究者は下線)

[雑誌論文] 計 9 件)

① Wolfram Bauer, Kenro Furutani and Mitsuji Tamura, *First integrals of bi-characteristic curves of a sub-Laplacian and related Grushin type operators*, to appear in Journal of Non-linear and Convex Analysis, 査読有 (2017 年出版予定).

② Christian Autenried, K. Furutani, Irina Markina, and Alesander Vasiliev, *Pseudo metric 2-step nilpotent Lie algebras*, to appear in Advance in Geometry, 査読有 (2018 年出版予定).

③ K. Furutani, I. Markina, *Complete classification of pseudo H-type algebras:I*, Published online : 06/February/2017 in Geometriae Dedicata, 査読有. DOI 10.1007/s10711-017-0225-1

④ K. Furutani and M. Tamura, *Submersion and bi-characteristic curves of Grushin type operators*, Journal of Non-linear and Convex Analysis, Vol. 17, no. 9, 1697-1716(2016), 査読有.

⑤ K. Furutani, I. Markina and A. Vasiliev, *Free nilpotent and H-type Lie algebras. Combinatorial and orthogonal designs*, Journal of pure and applied algebra, Vol. 219, 5467-5492 (2015), 査読有. <http://dx.doi.org/10.1016/j.jpaa.2015.05.027>

⑥ W. Bauer and K. Furutani and Chisato Iwasaki, *Spectral zeta function on pseudo H-type nilmanifolds*, Indean Journal of Pure and Applied Mathematics, Vol. 46, no. 4, 539 - 582(2015), 査読有. DOI: 10.1007/s13226-015-0151-6

⑦ W. Bauer and K. Furutani and C. Iwasaki, *The inverse of a parameter family of degenerate operators and applications to the Kohn-Laplacian*, Advances in Mathematics, Vol. 277, 283 - 337(2015), 査読有. <http://dx.doi.org/10.1016/j.aim.2014.12.041>

⑧ W. Bauer and K. Furutani and C. Iwasaki, *Fundamental solution of a higher step Grushin type operator*, Advances in Mathematics, Vol. 271, 188 - 234 (2015), 査読有. <http://dx.doi.org/10.1016/j.aim.2014.11.017>

⑨ K. Furutani and I. Markina, *Existence of the lattice on general H-type groups*, Journal of Lie Theory, 24, No. 4, 979 - 1011 (2014), 査読有.

[学会発表] (計 21 件)

① K. Furutani, *Complete classification of pseudo H-type algebras and an application*, 2017 Geometric and Singular Analysis at University of Potsdam, Potsdam, Germany, 20-24/February/2017, 講演は 24 日.

② K. Furutani, *SubRiemann structures in a principal bundle and Popp measures*, Analysis seminar at Leibniz Universität Hannover, Germany, 17/February/2017.

③ K. Furutani, *A codimension 3 sub-Riemannian structure on Gromoll-Meyer exotic 7 sphere*, Geometry seminar at Ritsumeikan University, 26/September/2016.

④ K. Furutani, *A codimension 3 sub-Riemannian structure on Gromoll-Meyer exotic 7 sphere*, Analysis seminar at Leibniz Universität Hannover, Germany, 20/July/2016.

⑤ K. Furutani, *A codimension 3 sub-Riemannian structure on Gromoll-Meyer exotic 7 sphere*, Operator algebra seminar at University of Copenhagen, Denmark, 13/July/2016.

⑥ K. Furutani, *Co-dimension 3 sub-Riemannian structure on Gromoll-Meyer exotic 7 sphere*, 2016 NCTS International Workshop on Geometric Analysis and Subelliptic PDEs, National Taiwan Univesity, Taipei, 24/May/2016.

⑦ K. Furutani, *Bi-characteristic flows of a sub-Laplacian and related Grushin type operator*, International Workshop on Applied Analysis and Optimization, China Medicine University, Taichung, Taiwan, 28/May/2016.

⑧ K. Furutani, *Complete classification of pseudo H-type algebras and isospectral non-diffeomorphic nilmanifolds*, at Representation seminar of Kyushu University, 20/January/2016.

⑨ K. Furutani, *Hamilton-Jacobi equation attached to a higher step Grushin operator and its heat kernel*, at Workshop in Analysis and PDE, at Leibniz Universität Hannover, 29/September - 01/October, 講演は 10 月 1 日.

⑩ K. Furutani, *Isospectral but non-diffeomorphic nilmanifolds attached to Clifford modules* at Deutschen Mathematiker-Vereinigung miniworkshop, Symplectic Structures in Geometric Analysis, Humburg university, 22-23/September 2015, 講演は 23 日.

⑪ K. Furutani, *Geometry of Symmetric Operators*, Analysis seminar at University of Bergen, 8/September/2015.

⑫ K. Furutani, *Lie algebras attached to Clifford modules, their classification and application to Kac's problem*, Algebra seminar at University of Bergen, 31/August/2015.

⑬ K. Furutani, *Bicharacteristic flow of the spherical Grushin operator and isoperimetric problem* at 2015 International Workshop on Applied Analysis and Optimization, China Medicine University, Taichung, Taiwan, 28/June/2015.

⑭ K. Furutani, *Classification of pseudo H-type algebras and isospectral nilmanifolds*, 2015 NCTS International Workshop in Subelliptic PDEs and Singular Analysis at National Taiwan University, Taipei, Taiwan, 25/June/2015.

⑮ K. Furutani, *Spectrum of the sub-Laplacian and Laplacian on nilmanifolds attached to Clifford modules and isospectral non-diffeomorphic manifolds*, at Himeji Conference on partial differential equations, Himeji, Japan, 6/March/2015.

⑯ K. Furutani, *Isopectral non-diffeomorphic nilmanifolds attached to Clifford modules*, at International workshop: Geometric and Singular Analysis at University of Potsdam, Potsdam, Germany, 11/February/2015.

⑰ K. Furutani, *Isospectral but non-diffeomorphic nilmanifolds with respect to sub-Laplacians*, at Hong Kong Baptist University analysis seminar, 28/October/2014.

⑱ K. Furutani, *Towards a construction of a heat kernel for a higher step Grushin operator* Analysis seminar at University of Bergen, at University of Bergen, Norway, 26/August/2014.

⑲ K. Furutani, *Towards a construction of a heat kernel for a higher step Grushin operator*, Geometry Nara 2014 at Nara Woman's University, 19/August/2014.

⑳ K. Furutani, *Pseudo H-Type Groups and their classification*, 2014 NCTS Workshop on Ge-

ometric and Singular Analysis, at National Tsing Hua University, Hsinchu, Taiwan, 3-4/July/2014, 講演は 3 日.

㉑ K. Furutani, *Pseudo H-Type groups and their integral structure*, Fu-Jen Catholic university Analysis Forum at Shinhoku-city, Taiwan, 02/July/2014.

## 6. 研究組織

### (1) 研究代表者

古谷 賢朗 (Furutani, Kenro)  
東京理科大学・理工学部・教授  
研究者番号：70112901

### (2) 研究分担者

なし

### (3) 連携研究者

岩崎 千里 (Iwasaki, Chisato)  
兵庫県立大学・物質理学研究科・特命教授  
研究者番号：30028261

田村 充司 (Tamura, Mitsuji, 2014 年度のみ)  
東京理科大学・理工学部・助教  
研究者番号：60536548

### (4) 研究協力者

Wolfram Bauer (ドイツ・ハノーバ大学教授)  
Irina Markina (ノルウェー・ベルゲン大学教授)  
Alexander Vasiliev(ノルウェー・ベルゲン大学教授)

田村 充司 (Tamura, Mitsuji, 2015 年度, 2016 年度)