様　式　C－１９、F－１９－１、Z－１９　(共通)

科研費 KAKENHI

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 ３０ 年　 ５ 月 ２１ 日現在

機関番号：３４４１９
研究種目：基盤研究(C)（一般）
研究期間：2014～2017
課題番号：２６４００１２６

研究課題名（和文）パラメトリック・ストークス現象の代数解析

研究課題名（英文）Algebraic analysis of parametric Stokes phenomena

研究代表者
青木　貴史（AOKI, TAKASHI）

近畿大学・理工学部・教授

研究者番号：８０１５９２８５

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　3,800,000円

研究成果の概要（和文）：超幾何微分方程式に含まれる3つの固有パラメータに大きなパラメータを1次関数として導入するとWKB解と呼ばれる形式解が構成できる。この構成は代数的、初等的に可能であるが得られた解は一般に発散し、そのままでは解析的な意味を持たない。この形式的に解をボレル総和法を適用することができ、解析的な解が構成できる。一方、超幾何微分方程式には超幾何関数で表示される標準的な解析解が知られている。本研究では、これらの古典的な解とWKB解のボレル和として得られる解の間の線型関係式を明らかにした。応用として超幾何関数のパラメータに関する漸近展開の公式を一般的に得た。ストークス現象を記述する式も併せて得られている。

研究成果の概要（英文）：Introducing a large parameter in the 3 parameters contained in the Gauss hypergeometric differential equation, we can construct the WKB solutions which are formal solutions to the equation. The construction is done algebraically and elementarily, however, these formal solutions are divergent in general and do not have analytic sense. We may apply the Borel resummation method to the formal solutions and can construct analytic solutions and bases of the solution space. On the other hand, the Gauss hypergeometric differential equation has standard bases of solutions expressed by the hypergeometric function. In this research, we have obtained linear relations between these two classes of bases. As an application, asymptotic expansion formulas with respect to the large parameter of the Gauss hypergeometric function have been obtained. At the same time, we have some formulas which describe the parametric Stokes phenomena of the WKB solutions.

研究分野：代数解析学

キーワード：超幾何微分方程式　超幾何関数　WKB解　特異摂動　ストークス現象　漸近展開　ボレル総和法　合流型超幾何微分方程式

１．研究開始当初の背景

本研究の基本的な手法は完全 WKB 解析に基づいている．完全 WKB 解析では大きなパラメータ（またはその逆数としての小さなパラメータ）を含む微分方程式などの関数方程式に対して WKB 解と呼ばれる形式解を用いて大域解析を行う．元々は量子力学の創成期に１次元定常的シュレディンガー方程式から固有値を求める際にプランク定数を小さなパラメータと見て解の形式的な展開を求め、その初項あるいは第２項までを WKB 解と呼び, 解の近似として採用した上で物理的考察により接続問題を考察したことに由来する．完全 WKB 解析では，近似解ではなく，大きなパラメータの逆数の形式的べき級数（指数関数項を含む）で表される形式解を考える．一般にこれは発散級数となるが，そのボレル和を用いることにより大域解析が可能となる．ボレル和を構成するためにボレル変換を行う．形式解のボレル変換の特異点の挙動は偏微分方程式論を活用することにより解析できる．解析的な解は形式解のボレル和をとる，すなわちボレル変換の解析接続を逆ラプラス変換することにより得られる．従って解析的解の大域解析は形式解とそのボレル和の対応関係の解析に帰着される．完全 WKB 解析の基本的なアイデアは 1980 年頃に A. ヴォロスにより与えられた．ほぼ同時期に H. シルバーストーンが形式解のボレル和を通じてシュレディンガー方程式を解析すべきであると提唱している．また，同じ頃に J. エカールが再生関数の理論を構築し，ヴォロスの理論との親和性が明らかになった．その後，F. ファムのグループがヴォロス理論を拡充してエカール理論との関係も含め様々な研究を行った．1989 年頃に佐藤幹夫はファムからの指摘を受けて，超局所解析において「失われた１次元分」の解析が完全 WKB 解析により可能になるのではないかと着想し，超局所解析や代数解析的手法を活用して完全 WKB 解析を行う特異摂動の代数解析学を提唱した．河合隆裕，竹井義次および報告者・青木を加えてこの研究は進み, 2 階フックス型線型常微分方程式のモノドロミー行列計算など，古典的手法では不可能であった問題の解決が可能となった．さらには 3 階以上の高階線型微分方程式の大域解析もこの手法で攻略可能であることが分かってきた．3 階以上の場合はストークス曲線の交叉が起こり，交叉点から新たなストークス曲線が生じるという困難が起こる．新たに生じたストークス曲線が更なる交叉を生み，これを続けると有限回数で閉じたストークス曲線が得られる保証もない．河合・竹井・青木は新しいストークス曲線の発生点として，表面的に現れる交叉点ではなく，より根源的な意味を持つ仮想変わり点の概念を導入して，高階方程式の完全 WKB 解析における礎を築いた．この方向での研究は現在でも続いている．一方，非線形微分方程式に対しても完全 WKB 解析は有効であることも分かってきている．パンルヴェ方程式の形式的一般解の構成，および接続問題に関する成果が得られている．本研究はこれらの研究を背景としている．

２．研究の目的

本研究では研究開始当初に以下の目標を設定した：

(1) 超幾何微分方程式および合流型超幾何微分方程式のパラメトリック・ストークス現象解明

(2) 超幾何関数および合流型超幾何関数のパラメータに関する漸近展開公式の一般形導出

(3) Whitney 関数のカテゴリー，Gevrey 増大度の解析関数の空間に作用する擬微分作用素理論整備

(4) Heun 型方程式の解および一般化超幾何関数のパラメータに関する漸近展開公式導出

超幾何微分方程式には 3 個の，合流型超幾何微分方程式には 2 個のパラメータがそれぞれ含まれる．これらのパラメータに大きなパラメータを１次関数として導入しする．合流超幾何微分方程式の場合にはさらに独立変数に大きなパラメータを掛ける変換を行う．第一の目的は，これらの微分方程式の WKB 解について１次関数の係数が変化したときに生じるストークス現象を記述する公式の導出を目指した．第二の目的は超幾何関数，合流型超幾何関数に前述の様に大きなパラメータを導入したときに，そのパラメータに関する漸近挙動を記述する公式を見出すことであった．第三の目的では無限階を含む擬微分作用素の表象理論の基礎付けを目指した．第四に目的は完全 WKB 解析の更なる応用を目指したものであった．

３．研究の方法

超幾何微分方程式および合流型超幾何微分方程式の WKB 解は主に２通りの方法で規格化される．一つは変わり点で規格化するもので，他は特異点で規格化する．変わり点で規格化したものは独立変数に関するストークス現象を記述するのに便利であり，特異点で規格化したものは劣勢なものがストークス現象を起こさず，特異点における局所的な解析的解と比較しやすいという利点を持つ．これら二通りの WKB 解を結びつけるのがヴォロス係数である．ヴォロス係数の具体形を計算し，そのボレル和を考えることによりパラメータに関するストークス現象をヴォロス係数のボレル和の変化で記述可能となる．この方法により第一の目標および第二の目標に迫った．第三の目標に関しては，擬微分作用素の核関数および表象に見かけ上のパラメータを余分に入れることにより対応関係を簡潔に表示する方法を取った．第四の目標は難度の高いものであるので，基礎的部分の整備を通してアプローチの方法を探った．

４．研究成果

(1) 超幾何微分方程式および合流型超幾何微分方程式のヴォロス係数の一般的導出およびパラメトリック・ストークス現象の記述

ガウスの超幾何微分方程式

$$x(1-x)\frac{d^2w}{dx^2}+(c-(a+b+1)x)\frac{dw}{dx}-abw=0$$

に大きなパラメータ η を $a=\alpha_0+\eta\alpha$, $b=\beta_0+\eta\beta$, $\gamma=\gamma_0+\eta\gamma$ として導入した方程式のヴォロス係数の具体的表示を次の形で得た：

$$\begin{aligned}V=\frac{1}{2}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}\eta^{1-n}}{n(n-1)}\biggl(&\frac{B_n(\alpha_0)}{\alpha^{n-1}}+\frac{B_n(\beta_0)}{\beta^{n-1}}\\&+\frac{B_n(\gamma_0-\alpha_0)}{(\gamma-\alpha)^{n-1}}+\frac{B_n(\gamma_0-\beta_0)}{(\gamma-\beta)^{n-1}}\\&-\frac{B_n(\gamma_0)+B_n(\gamma_0-1)}{\gamma^{n-1}}\biggr)+\cdots\end{aligned}$$

ただし，$B_n(x)$ は n 次ベルヌーイ多項式を表す．$\alpha_0=\beta_0=1/2$，$\gamma=1$ の場合には前課題の研究で得られていたが，今回パラメータの提示の項を一般化した形で導出することができた．合流型超幾何微分方程式についても同様に表示が得られた．これを応用してパラメトリック・ストークス現象を表す式が得られる．

(2) 超幾何関数および合流型超幾何関数のパラメータに関する漸近展開公式の一般形導出

特異点で規格化した劣勢 WKB 解のボレル和 $\Phi_+^{(0)}$ と超幾何関数の関係式は，パラメータに適当な仮定を設けると，例えば次の形で得られる：

$$\begin{aligned}&F(\alpha_0+\alpha\eta,\ \beta_0+\beta\eta,\gamma_0+\gamma\eta;x)\\&\quad=\sqrt{\frac{c-1}{2}}\ x^{-\frac{1}{2}c}(1-x)^{-\frac{1}{2}(a+b-c+1)}\ \Phi_+^{(0)}(x,\eta)\end{aligned}$$

合流型についても同様の公式が得られる．これらの公式においてボレル和 $\Phi_+^{(0)}$ を WKB 解で置き換えるとワトソンの補題より超幾何関数，合流型超幾何関数の漸近展開公式が得られる．

(3) 解析的擬微分作用素の基礎理論

従来の表象理論では不十分であった核関数と表象の対応関係，表象の積と留数写像による作用素の合成の整合性などを「見かけのパラメータ」と呼ばれる余分な１次元を加えることにより代数解析的に完全な理論整備を行った．

５．主な発表論文等（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計１０件）

① T. Suzuki, A higher order Painlevé system in two variables and extensions of the Appell hypergeometric functions F_1, F_2 and F_3, Funkcialaj Ekvacioj, 査読有 **61** (2018), 81–107, doi: https://doi.org/10.1619/fesi.61.81

② T. Aoki, N. Honda and S. Yamazaki, Foundation of symbol theory for analytic pseudodifferential operators, I, 査読有 J. Math. Soc. Japan, **69**, (2017), 1715–1801, doi: 10.2969/jmsj/

③ T. Aoki, T. Takahashi and M. Tanda, Relation between the hypergeometric function and WKB solutions, 査読有 RIMS Kôkyûroku Bessatsu **B61** (2017), 1– 7.

④ T. Suzuki, A reformation of the generalized q-Painlevé VI system with $W(A^{(1)}_{2n+1})$ symmetry, 査読有 Journal of integrable systems, **2**, (2017), 1–18 doi: 10.1093/integr/xyw017

⑤ T. Aoki and M. Tanda, Parametric Stokes phenomena of the Gauss hypergeometric differential equation with a large parameter, 査読有 J. Math. Soc. Japan, **68**, (2016), 1099–1132, doi: 10.2969/jmsj/06831099

⑥ T. Aoki, T. Takahashi and M. Tanda, The hypergeometric function and WKB solutions, 査読有 RIMS Kôkyûroku Bessatsu **B57** (2016), 061–068.

⑦ Y. Nakamura, The b-function of Reiffen's $(p, 4)$ isolated singularity, 査読有 J. of Algebra and appl. **15** (2016), 1650155, doi: 10.1142/s0219498816501152

⑧ T. Suzuki, A q-analogue of the Drinfeld-Sokolov hierarchy of type A and q-Painlevé system, 査読有 AMS Contemp. Math. **651** (2015), 25–38, doi: http://dx.doi.org/10.1090/conm/651

⑨ T. Aoki, T. Takahashi and M. Tanda, Exact WKB analysis of confluent hypergeometric differential equations with a large parameter, 査読有 RIMS Kôkyûroku Bessatsu **B52** (2014), 165–174.

⑩ T. Suzuki, Six-dimensional Painlevé system and their particular solutions in terms of rigid systems, 査読有 J. Math. Phys. **55** (2014), 102902, doi: 10.1063/1.4898766

〔学会発表〕（計１０件）

① T. Suzuki, A higher order generalization of the Painlevé VI equation with $W(A^{(1)}_{2n+1})$ symmetry, 国際学会・招待講演　Conformal field theory, isomonodromy tau-functions and Painlevé equations, 2017 年 12 月 1 日，神戸

② 青木貴史, Exact WKB analysis of the Gauss hypergeometric differential equation, 招待講演　RIMS 共同研究・公開型「超局所解析と漸近解析」2017 年 10 月 16 日　京都

③ T. Aoki, Exact WKB analysis of the Gauss hypergeometric differential equation, RIMS-iTHEMS International Workshop on Resurgence Theory, 国際学会・招待講演　2017 年 9 月 6 日　神戸

④ T. Suzuki, From Heine to q-Painlevé, 国際学会・招待講演　25th International Conference on Integrable Systems and Quantum Symmetries, 2017 年 6 月，プラハ

⑤ T. Aoki, The Gauss hypergeometric function, the Kummer confluent hypergeometric function and WKB solutions, Resurgence at Kavli IPMU, 国際学会・招待講演 2016 年 12 月 15 日　柏

⑥ T. Aoki, The hypergeometric function, confluent hypergeometric functions and WKB solutions, RIMS Symposium on New development of microlocal analysis and singular perturbation theory, 国際学会・招待講演 2016 年 10 月 6 日，京都

⑦ T. Suzuki, A generalization of the q-Painlevé equation from a viewpoint of a basic hypergeometric solution, Symmetries and Integrability of Difference Equations 12, 国際学会・招待講演 2016 年 7 月 8 日，ケベック

⑧ 青木貴史, The hypergeometric function and WKB solutions, 微分方程式の総合的研究 招待講演 2015 年 12 月 20 日　東京

⑨ T. Aoki, The hypergeometric function and WKB solutions, Banach Center Conferences: Analytic, Algebraic and Geometric Aspects of Differential Equations, 国際学会・招待講演 2015 年 9 月 17 日　ベンドレヴォ

⑩ T. Aoki, The hypergeometric function and WKB solutions, RIMS Symposium on Several aspects of micro local analysis, 国際学会・招待講演 2014 年 10 月 20 日　京都

６．研究組織

(1) 研究代表者

青木　貴史　（AOKI, Takashi）
近畿大学・理工学部・教授
研究者番号：８０１５９２８５

(2) 研究分担者

鈴木　貴雄（SUZUKI, Takao）
近畿大学・理工学部・准教授
研究者番号：６０５２７２０８

中村　弥生 (NAKAMURA, Yayoi)
近畿大学・理工学部・准教授
研究者番号：６０３８８４９４

(3) 連携研究者

本多　尚文（HONDA, Naofumi）
北海道大学大学院・理学系研究院・准教授
研究者番号：００２３８８１７

河合　隆裕 (KAWAI, Takahiro)
京都大学・数理解析研究所・名誉教授
研究者番号：２２０２７３７９

竹井　義次 (TAKEI, Yoshitsugu)
京都大学・数理解析研究所・准教授
研究者番号：００２１２０１９

山崎　晋 (YAMAZAKI, Susumu)
日本大学・理工学部・教授研究者番号：００３４
９９５３

小池　達也 (KOIKE, Tatsuya)
神戸大学大学院・理学研究科・准教授
研究者番号：８０３２４５９９

梅田　陽子 (UMETA, Yoko)
城西大学・理学部・准教授
研究者番号：９０６０６３８６