

平成 30 年 6 月 28 日現在

機関番号：13601

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2014～2017

課題番号：26400131

研究課題名(和文)バナッハ空間及び関数空間の幾何学的構造と直和の研究

研究課題名(英文)Research on geometric structures of Banach and function spaces with direct sums

研究代表者

加藤 幹雄 (KATO, Mikio)

信州大学・工学部・非常勤講師

研究者番号：50090551

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,600,000円

研究成果の概要(和文)：バナッハ空間の直和に対してuniform non-square性(UNSQ性)、その一般化であるuniform non-[ell]-n₁性、またp凸性などについて一連の成果を得た。とくに任意有限個のバナッハ空間のUNSQ性を特徴づけた。この問題はこれまでに部分的な解答がいくつか得られていたが、本研究の成果が最終的な解答となった。上述の結果の系として、L_p空間の直和やC^N(Nは上付き添字)上のstrictly monotoneノルムのuniform non-[ell]-n₁性を特徴づけた。また、James型定数に関する一連の結果を得た(以上において一部の結果は論文作成中)。

研究成果の概要(英文)：A sequence of results on some geometric properties, especially, the uniform non-squareness, uniform non-[ell]-n₁-ness, and p-convexity, etc. were obtained for direct sums of Banach spaces. Especially, the problem to characterize uniform non-squareness for direct sums of "finitely many Banach spaces" was solved, which was the most important problem of this research program. As corollaries of the result on uniform non-[ell]-n₁-ness we obtained characterizations of this property for direct sums of L_p-spaces and for strictly monotone norms on C^N (N: superscript). Several results on James-type constant J_t(X) of a Banach space X were also obtained. (Some of the above results are in preparation.)

研究分野：関数解析学、バナッハ空間論

キーワード：バナッハ空間 直和 凸関数 uniform non-square性 uniform non-[ell]-n₁性 不動点性 バナッハ空間の幾何学的定数 James型定数

1. 研究開始当初の背景

種々の凸性などバナッハ空間の幾何学的性質は、それ自身バナッハ空間論の主要な研究対象であるばかりでなく、解析学における多くの分野において主要な概念や道具を与える点で重要である。最近、当該分野の研究は世界的に一段と活発になっているが、研究代表者等の研究がいくつかその端緒となっている。

加藤-Maligranda-高橋[Studia Math., 2001] は、von Neumann-Jordan定数 $C_{NJ}(X) < 5/4$ からバナッハ空間 X の一様正規構造・不動点性を導いた。これにより Gao-Lau[Studia Math., 1991] による James 定数 $J(X)$ の研究に端を発した問題「uniformly non-square (UNSQ) なバナッハ空間は不動点性をもつか」に部分的な解答を与えた。この問題は2006年に Garcia-Falset等[J. Funct. Anal.] により肯定的な解決を見たが、その証明に加藤-Maligranda-高橋の上述の結果が本質的に用いられた。以後、より一般に「uniformly non-octahedral (UNOH) なバナッハ空間は不動点性をもつか」が未解決問題になっている。加藤-田村[Comment. Math., 2009, 2012] は直和を用いて、不動点性をもつ UNOH な空間で UNSQ でない例をいくつか構成した。

高橋-加藤[TK; JMAA, 2009] は NJ 定数と James 定数に関する簡潔な不等式を与えたが、同時期に別証明が複数出版された (F. Wang [Proc. AMS, 2010] 等)。なお最近、多くの幾何学的定数の研究が著しいが、それらを見通し良く整理することが望まれる状況にある。

2. 研究の目的

「回帰性」(位相的性質) や「(非拡大写像に対する) 不動点性」(距離的性質) といったバナッハ空間の重要な性質が単位球の一様凸性(より一般に UNSQ 性) から導かれる。このように単位球の幾何学的形状がバナッハ空間の性質に大きく反映する。本研究では、これまでの成果を踏まえて以下の研究を進める。
(a) バナッハ空間の直和 (ℓ_p 直和の拡張)

について研究を進め、その理論体系を整備する。またその変形である空間 $X(\quad)$ (未発表) を考察する。

(b) 種々の幾何学的定数を James 型定数、von Neumann-Jordan 型定数を中心に分類し、従来の膨大な結果を統一的に見直す視点から研究を進める。

3. 研究の方法

研究代表者・分担者の以下の役割分担に基づいて組織的な研究を展開してゆく: absolute norm の応用(斎藤)、不動点性及び直和の研究(田村)、非線形解析・不動点性への応用(鈴木)、代表者・加藤が研究全体を総括する。研究の遂行にあたっては、電子メール等によって緊密に研究連絡を行うとともに、極力、直接研究打ち合わせを行う。また、国内外で適宜研究成果を発表して着実に研究を進めていく。

4. 研究成果

(1) バナッハ空間の幾何学的定数 $A_2(X)$ を変形して新たな定数 $A(X)$ を導入し、従来の結果を改良、拡張して一連の成果を得た[高橋-加藤, Acta Math. Sinica, 2014]。とくに、高橋-加藤等による von Neumann-Jordan 定数 $C_{NJ}(X)$ と James 定数 $J(X)$ に関する不等式 $C_{NJ}(X) \leq J(X)$ (JMAA, 2009) に簡潔な別証明を与えた。

(2) ノルムが strictly monotone のとき、凸関数のクラス $\mathcal{N}_N^{(1)}$ (加藤-田村, Comment. Math., 2012) を用いて N 個のバナッハ空間の直和に対して UNSQ 性を特徴づけた。また、 $\mathcal{N}_N^{(1)}$ を細分化した凸関数のクラス $\mathcal{N}_N^{(1,n)}$ を導入して、有限個のバナッハ空間の直和について uniform non- ℓ_1^n 性を特徴づけた。系として、 L_p 空間の直和、また C^n 上の absolute ノルムに対して uniform non- ℓ_1^n 性を特徴づけた (J. Nonlinear Convex Anal., 2015)。

(3) ノルムを一般のノルムに置き変えて A 直和の概念を導入し、直和の概念を一般化した。これらの概念が同値であることを示して、 A 直和に対して (2) の結果を導いた。とくに

Dowling-Saejungによる同様の結果 (J. Math. Anal. Appl., 2010) を改良した (Dompongsa-加藤-田村, Linear and Nonlinear Anal., 2015)。

(4) 「任意有限個のバナッハ空間の直和の UNSQ 性を特徴づける」問題は 2004 年以来 open problem としていくつかのアプローチが成されてきた。とくに、Betruk-Pilarska and Prus (2009), Dowling and Saejung (2010) 等の著名な数学者により、また Dompongsa, Kato and Tamura (2015) により部分的な解答が与えられた。本研究では、新たな凸関数の族 $N^{(mix)}$ を導入して、従前の結果をすべて包含する形でこの問題に対する最終的な解答を与えた (論文作成中)。これは本研究課題における最も重要な成果である。

(5) p 凸性は uniform non- \varnothing^n 性より強い性質で回帰性を導く。直和の p 凸性について一定の結果を得た (論文作成中)。

(6) バナッハ空間の James 型定数について一連の成果を得た。これにより、従来、個々に研究されてきた種々の幾何学的定数に関するいくつかの結果が統一的に得られる (論文作成中)。

(7) 以下の国際会議で本研究の成果について招待講演を行った：

12th International Conference “Forum of Interdisciplinary Mathematics” (2017); The 5th Asian Conference on Nonlinear Analysis and Optimization (2016); Fifth International Symposium on Banach and Function Spaces 2015 (2015); The 4th Asian Conference on Nonlinear Analysis and Optimization--ICM2014 Satellite Conference (2014)。

以下の大学を訪問して本研究の成果について講演を行った：

Univ. of Vienna (Vienna, Austria, 2017), Lulea Univ. Tech. (Lulea, Sweden, 2017), Khon Kaen Univ. (Khon Kaen, Thailand, 2017),

Poznan Univ. Tech. (Poznan, Poland, 2017), Xiamen Univ. (Xiamen, China, 2016), Chiang Mai Univ. (Chiang Mai, Thailand, 2015)。

国内では、日本数学会年会・秋季総合分科会、実解析学シンポジウム、京都大学数理解析研究所研究集会などで研究成果を発表した。

5. 主な発表論文等 (研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 25 件)

1. Mikio Kato, Takuya Sobukawa and Takayuki Tamura, Some results on direct sums of Banach spaces --- A survey, Math. Japon., to appear (査読有)。
2. Takayuki Tamura, Mikio Kato, The fixed point property of A-direct sums of N uniformly non-square Banach spaces, 京都大学数理解析研究所講究録, 掲載決定 (査読無)。
3. Naoto Komuro, Kichi-Suke Saito and Ryotaro Tanaka, A sufficient condition that $J(X^*)=J(X)$ holds for a Banach space X, Tokyo J. Math., to appear (査読有)。
4. Naoto Komuro, Kichi-Suke Saito and Ryotaro Tanaka, Symmetric points for (strong) Birkhoff orthogonality in von Neumann algebras with applications to preserver problems, J. Math. Anal. Appl. **463** (2018), 1109-1131 (査読有)。
5. Tomonari Suzuki, Every generalized metric space has a sequentially compatible topology, Linear Nonlinear Anal. **3** (2017), 393-399 (査読有)。
6. Tomonari Suzuki, A generalization of the Banach contraction principle in noncomplete metric spaces, Filomat **31** (2017), 3357-3363, Open Access (査読有)。

7. 高橋泰嗣、加藤 幹雄、三谷 健一, Some results on James type constant of a Banach space, 京都大学数理解析研究所講究録 **2041** (2017), 65-71 (査読無).
8. Mikio Kato, Lech Maligranda and Tomonari Suzuki (editors), Proceedings of the 5th International Symposium on Banach and Function Spaces 2015 (ISBFS2015) Part 1, Special issue of Linear Nonlinear Anal. vol. **3** no. 1 (2017) (編集; 査読有).
9. Takayuki Tamura, On Dominguez-Benavides coefficient of λ -direct sums $(X_1 \oplus \dots \oplus X_N)$ of Banach spaces, Linear and Nonlinear Anal. **3** (2017), 87-99 (査読有).
10. Naoto Komuro, Kichi-Suke Saito and Ryotaro Tanaka, On the class of Banach spaces with James constant $2^{1/2}$ III, Math. Inequal. Appl. **20** (2017), 865-887 (査読有).
11. Tomonari Suzuki, A generalization of the Banach contraction principle in noncomplete metric spaces, Filomat **31** (2017), 3357-3363 (査読有).
12. Mikio Kato and Takayuki Tamura, On direct sums of Banach spaces, 実解析学シンポジウム2015, **48** (2016), 45-50 (査読無).
13. Mikio Kato, Lech Maligranda and Tomonari Suzuki (editors), Proceedings of the 5th International Symposium on Banach and Function Spaces 2015 (ISBFS 2015) Part 2, Special issue of Linear Nonlinear Anal. vol. **2** no. 2 (2016) (編集; 査読有).
14. Naoto Komuro, Kichi-Suke Saito and Ryotaro Tanaka, On the class of Banach spaces with James constant $2^{1/2}$, Math. Nach. **289** (2016), 1005-1020 (査読有).
15. Tomonari Suzuki, Another generalization of Edelstein's fixed point theorem in generalized metric spaces, Linear Nonlinear Anal. **2** (2016), 271-279 (査読有).
16. Sompong Dhompongsa, Mikio Kato, and Takayuki Tamura, Uniform non-squareness for A -direct sums of Banach spaces with a strictly monotone norm, Linear Nonlinear Anal. **1** (2015), 247-260 (査読有).
17. Mikio Kato and Takayuki Tamura, On the uniform non- ℓ_1^n -ness and new classes of convex functions, J. Nonlinear Convex Anal. **16** (2015), 2279-2295 (査読有).
18. Takayuki Tamura, Weakly convergent sequence coefficient and its generalization in direct sums of Banach spaces, 実解析学シンポジウム2015, **47** (2015), 45-50 (査読無).
19. Mikio Kato and Takayuki Tamura, Direct sums of Banach spaces with FPP which fail to be uniformly non-square, J. Nonlinear Convex Anal. **16** (2015), 231-241 (査読有).
20. Kichi-Suke Saito, Masahiro Sato and Ryotaro Tanaka, When does the equality $J(X^*)=J(X)$ hold?, Acta Math. Sinica English Series **31** (2015), 1303-1314 (査読有).
21. Misako Kikkawa and Tomonari Suzuki, Fixed point theorems for new nonlinear mappings satisfying Condition (CC), Linear Nonlinear Anal. **1** (2015), 37-52 (査読有).
22. Yasuji Takahashi and Mikio Kato, On a new geometric constant related to the modulus of smoothness of a Banach space, Acta Math. Sinica English Series **30** (2014), 1526-1538 (査読有).
23. Toshiharu Ikeda and Mikio Kato, Notes on von Neumann-Jordan and James constants

- for absolute norms on \mathbb{R}^2 , *Mediterr. J. Math.* **11** (2014), 633-641 (査読有).
24. Mikio Kato and Takayuki Tamura, On a class of convex functions which yield partial ℓ_1 -norms, In: *Banach and Function Spaces IV* (Proc. Fourth International Symposium on Banach and Function Spaces 2012), pp. 199-210, 2014 (査読有).
25. Ryotaro Tanaka, Tomoyoshi Ohwada and Kichi-Suke Saito, Geometrical constants and characterizations of inner product spaces, *Math. Inequal. Appl.* **17** (2014), 513-520 (査読有).

[学会発表](計 21 件)

1. Mikio Kato, Some inequalities in the Banach space geometry, Institute of Mathematics, Univ. of Vienna, 2017.
2. Mikio Kato, Direct sums of Banach spaces and convex functions, Department of Mathematics, Lulea University of Technology, 2017.
3. Mikio Kato, Introduction to Banach spaces --their geometry, Bilateral Conference FIM&ISME2017; Forum of Interdisciplinary Mathematics FIM2017, 2017 (招待講演; Keynote lecture).
4. Mikio Kato, Direct sums of Banach spaces and convex functions, Department of Mathematics, Khon Kaen University, 2017.
5. Mikio Kato, An invitation to geometry of Banach spaces, Department of Mathematics, Khon Kaen University, 2017.
6. Mikio Kato, Direct sums of Banach spaces and convex functions, Institute of Mathematics, Poznan University of Technology, 2017.
7. 高橋泰嗣, 加藤幹雄, 三谷健一, Some results on James type constant of a Banach space, 京都大学数理解析研究所研究集会, 2017.
8. 加藤幹雄, 田村高幸, On direct sums of Banach spaces, 実解析学シンポジウム2016, 2016.
9. 鈴木智成, λ -generalized metric space について, 実関数論・関数解析学合同シンポジウム, 2016 (招待講演).
10. Mikio Kato, and Takayuki Tamura, On A-direct sums of Banach spaces, 5th Asian Conference on Nonlinear Analysis and Optimization, 2016 (招待講演).
11. Kichi-Suke Saito, Naoto Komuro and Ryotaro Tanaka, $\lambda/2$ -rotation invariant norms on \mathbb{R}^2 and the James constant, 5th Asian Conference on Nonlinear Analysis and Optimization, 2016 (招待講演).
12. Mikio Kato, On geometry of Banach spaces – An Introduction and recent results I, School of Mathematical Sciences, Xiamen University, 2016.
13. Mikio Kato, On geometry of Banach spaces – An Introduction and recent results II, School of Mathematical Sciences, Xiamen University, 2016.
14. 田中亮太郎, 小室直人, 斎藤吉助, 回転不変ノルムに対するJames定数の双対性について, 日本数学会年会, 2016.
15. 鈴木智成, λ -generalized metric space の位相, 日本数学会年会, 2016.
16. Takayuki Tamura, Weakly convergent sequence coefficient and its generalization for direct sums of Banach spaces, 実解析学シンポジウム2015, 2015.
17. Takayuki Tamura, Sompong Dhompongsa and Mikio Kato, On A-direct sums of Banach spaces, Fifth International Symposium on Banach and Function Spaces 2015, 2015 (招待講演).
18. Mikio Kato, On the uniform non- ℓ_1^n -ness of direct sums of Banach spaces, 9th

International Conference on Nonlinear
and Convex Analysis, 2015 (招待講演).

19. 加藤幹雄, Banach空間の直和について,
ポテンシャル論セミナー, 2014.
20. 加藤幹雄, 田村高幸, On the uniform
non- ℓ_1^n -ness of direct sums of Banach
spaces, 日本数学会秋季総合分科会, 2014.
21. Mikio Kato, On the uniform non-
squareness of direct sums of Banach
spaces, The 4th Asian Conference on
Nonlinear Analysis and Optimization-
--ICM2014 Satellite Conference, 2014
(招待講演).

〔図書〕(計 0 件)

6. 研究組織

(1) 研究代表者

加藤 幹雄 (KATO, Mikio)
信州大学・工学部・非常勤講師
研究者番号: 50090551

(2) 研究分担者

齋藤 吉助 (SAITO, Kichi-Suke)
新潟大学・自然科学系・フェロー
研究者番号: 30018949

田村 高幸 (TAMURA, Takayuki)
千葉大学・大学院人文社会科学研究所・
助教
研究者番号: 30302582

鈴木智成 (SUZUKI, Tomonari)
九州工業大学・大学院工学研究院・教授
研究者番号: 00303173