

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 29 年 6 月 7 日現在

機関番号：15301

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2014～2016

課題番号：26400134

研究課題名(和文)無限次元空間上の確率解析と関連する微分作用素の研究

研究課題名(英文)Stochastic analysis on infinite dimensional spaces and its related differential operators

研究代表者

河備 浩司(KAWABI, HIROSHI)

岡山大学・自然科学研究科・教授

研究者番号：80432904

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,700,000円

研究成果の概要(和文)：無限次元空間上のある微分作用素の一意性問題および対応する確率過程の構成の研究を主に行った。特に、場の量子論の $\exp(\phi)_2$ -モデルに現れる超関数空間上のGibbs測度を可逆測度としてもつDirichlet作用素の一意性および対応する拡散過程の(特異な)確率偏微分方程式を用いた特徴付けを研究した。また結晶格子やベキ零被覆グラフ上の非対称ランダムウォークに対する中心極限定理を、離散幾何解析の観点から研究し、ラフパス理論への応用も考察した。さらに、抽象Wiener空間上のGauss測度全体のなす多様体の研究も行った。

研究成果の概要(英文)：I mainly studied uniqueness problems of differential operators and the corresponding stochastic dynamics on infinite dimensional spaces via stochastic analysis. In particular, I considered Dirichlet forms given by space-time quantum fields with interactions of exponential type, called $\exp(\phi)_2$ -measure, in Euclidean QFT, and proved strong uniqueness of Dirichlet operators of the corresponding Dirichlet operator. I also discussed the related singular stochastic partial differential equation. Besides, I studied central limit theorems for non-symmetric random walks on both crystal lattices and nilpotent covering graphs from a viewpoint of discrete geometric analysis, and discussed its application to rough path theory. Finally, I proved that the space of Gaussian measures on an abstract Wiener space becomes a Hilbert-Riemannian manifold with non-positive sectional curvatures.

研究分野：数物系科学

キーワード：確率解析 微分作用素 中心極限定理 確率偏微分方程式 rough path理論 結晶格子 ベキ零被覆グラフ ランダムウォーク

1. 研究開始当初の背景

解析学や幾何学では、様々な局面で2階の微分作用素が重要な対象として登場するが、この作用素が生成する拡散半群は、Brown運動をインプットとする確率微分方程式および確率偏微分方程式の解を用いた汎関数積分表現を持ち、この作用素の解析に確率解析の立場が重要となってくる。また確率解析的なアプローチは、状態空間が無限次元や離散的な対象でも有効に働くという利点は見逃せない。本研究はこの立場から、主に場の量子論や測度距離空間上の幾何学から派生した無限次元空間上の2階微分作用素、グラフ上の離散ラプラシアン、これらに対応する確率過程、汎関数積分の漸近挙動に対する新たな解析理論の構築を目論んで開始されたものである。

2. 研究の目的

本研究課題では、上記の状況および前研究課題「確率解析を用いた無限次元空間上の微分作用素の多角的研究」でやり残したことも考慮し、以下の2つの研究を主に行なう。

(1) 場の量子論から派生した無限次元空間上のDirichlet作用素なる2階の微分作用素の一意性問題および対応する(特異性をもつ)確率偏微分方程式の研究、またこのモデルを含むような無限次元空間上の実解析(Riesz変換の有界性、関数不等式)の基礎研究

(2) 結晶格子やベキ零被覆グラフなどの周期性を持つ無限グラフ上の非対称ランダムウォークに対する汎関数中心極限定理、局所中心極限定理の離散幾何解析的な研究、またこれを用いたラフパス理論への応用研究

3. 研究の方法

研究課題に関連する基本文献や論文を購入し、自らの手で分析し、新たな計算を行い、共同研究者と議論を行い、理解を深めていった。特に本研究はS. Albeverio氏(Bonn大)、M. Roeckner氏(Bielefeld大)との共同研究も含むために、数回のドイツ出張を行った。また最新の研究動向を把握し、研究に対する新たな知見を得るためには、関連分野の研究集会・セミナーに参加し、専門家と情報交換や議論を行うことも必要となる。特に2015年9月にS. Neukamm氏(TU-Dresden)、2016年7月にF. Baudoin氏(Purdue大)を本研究費で岡山に招聘し、確率均質化問題および無限次元Heisenberg群上の拡散作用素の一意性問題について踏み込んだ議論を行うことができたのは有益であった。

さらに「岡山確率論セミナー」、連携研究

者の廣川真男氏らと開催した「広島-岡山解析・確率論セミナー」に、他大学から講演者を招き、関連分野の情報収集を行い、中国地方の確率論研究の活性化を図った。これらのセミナーの講演者数人分の旅費を、本研究費からサポートすることができたのも大変ありがたかった。

4. 研究成果

(1) 場の量子論における $P(\varphi)_2$ 量子場のtoy modelとしてAlbeverioとHoegh-Krohnにより導入された $\exp(\varphi)_2$ -量子場モデルは、Sheffieldら多くの欧米の研究者により近年大きな発展を見せている2次元量子重力理論とも深く関係することから再注目を集めている。このモデルに現れる超関数空間上のGibbs測度は対数凹性という非常によい性質を持っているにも関わらず、有限体積の場合ですらこれに関する確率過程量子化プログラムに現れるDirichlet作用素の本質的自己共役性問題は今まで論じられていなかった。そこで、Albeverio, S. Mihalache, Roecknerの3氏との共同研究という形でこの問題に取り組み、指数相互作用項の中の電荷定数がある程度小さい場合に、Dirichlet作用素の L^p -一意性(本質的自己共役性は $p=2$ の場合に相当する)を示し、対応する拡散過程の(特異性をもつ)確率偏微分方程式の弱解での特徴付けを得ることができた。この成果は論文[5]でアナウンスをしたが、その後、2次元ラプラシアンのグリーン関数の原点での精密な漸近挙動を用いることにより、電荷定数の仮定を、物理的に最も自然な形まで弱めることに成功した。これらの成果をまとめた論文は次年度以降に完成させる予定である。

(2) 以前、石渡聡氏(山形大)、当時の大学院修士の学生の照屋翼氏と、三角格子上の非対称なランダムウォークの推移確率の長時間漸近挙動の研究を行い、論文[6]が出版されたが、その後、離散幾何解析の専門家の小谷元子氏(東北大)も交えて、この研究成果を一般の結晶格子の枠組みに拡張した。その結果、ランダムウォークの本来の非対称性の指標であるhomological directionおよびそれをユークリッド空間上に実現したasymptotic directionという量の違いが、結晶格子上の非対称ランダムウォークの局所中心極限定理の精密化を行う際に明確に見て取れた。またそれと同時に2種類汎関数中心極限定理も証明することができた。これらの研究成果は本研究期間中に国内外の多くの研究集会で口頭発表し、最終的には論文[2,4]という形で出版された。

またこの研究の続きとして、被覆変換群を離散ベキ零群に一般化した場合も石渡氏、現在の大学院博士の学生の難波隆弥氏と考察し、2種類の汎関数中心極限定理を得た。

先の結晶格子の場合は, asymptotic direction が 0 の場合はこれらの汎関数中心極限定理を通して共に Brown 運動が現れるが, ベキ零の場合は, あるベキ零 Lie 群上の Brown 運動に非対称性を反映するドリフトのついた拡散過程が現れる。この拡散過程は rough path 理論では, 磁場付き Brown ラフパスと呼ばれているものに対応し非常に興味深い。これらの成果は講演[2,6,8]において口頭発表し, 論文[1,3]にてアナウンスを出した。この研究の最終成果をまとめた論文は, 次年度以降に完成させる予定である。

(3) 抽象 Wiener 空間上の(元の Wiener 測度に絶対連続な) Gauss 測度全体に Wasserstein 距離を入れた Hilbert 多様体に自然な Riemann 計量が入り, 非負断面曲率をもつ無限次元 Hilbert-Riemann 多様体になることを高津 飛鳥 氏(首都大東京)との共同研究で示した。この成果は講演[1,3,4,14]において口頭発表した。なおこの多様体は不完備であるが, 最終年度の晩秋に, 完備化の特徴付けもでき, 興味深い無限次元 Alexandrov 空間も構成できた。プレプリントもすでに作成したが, 次年度以降にさらに磨きをかけて公表する予定である。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計 6 件)

[1] 石渡 聡, 河備 浩司, 難波 隆弥, “Central limit theorems for non-symmetric random walks on nilpotent covering graphs”, 京都大学数理解析研究所講究録 Vol.2030 (2017), pp. 9-16. (査読無)

[2] S. Ishiwata, H. Kawabi and M. Kotani, “Long time asymptotics of non-symmetric random walks on crystal lattices”, J. Funct. Anal. Vol 272 (2017), pp. 1553-1624. (査読有)

[3] S. Ishiwata, H. Kawabi and R. Namba, “From non-symmetric random walks on nilpotent covering graphs to rough paths via discrete geometric analysis”, Oberwolfach Reports Vol 24 (2016), pp. 1359-1362. (査読無)

[4] 石渡 聡, 河備 浩司, 小谷 元子, “結晶格子上的非対称ランダムウォークの中心極限定理”, 京都大学数理解析研究所講究録 Vol. 1952 (2015), pp. 30-37. (査読無)

[5] H. Kawabi, “Uniqueness of Dirichlet forms related to stochastic quantization

under exponential interaction in two-dimensional finite volume”, Oberwolfach Reports Vol 11 (2015), pp. 2736-2739. (査読無)

[6] S. Ishiwata, H. Kawabi and T. Teruya, “An explicit effect of non-symmetric random walks on the triangular lattice”, Math. J. Okayama Univ. Vol 57 (2015), pp.129-148. (査読有)

[学会発表](計 28 件)

[1] Hiroshi Kawabi “Riemannian Wasserstein geometry on the space of Gaussian measures over the Wiener space”, Markov processes and its geometric aspects, 福岡大学理学部, 2017 年 3 月 8 日.

[2] 河備 浩司 “From non-symmetric random walks on nilpotent covering graphs to distorted Brownian rough paths via discrete geometric analysis”, 首都大学東京 数理解析・幾何学合同セミナー, 首都大学東京大学院理工学研究科, 2017 年 2 月 1 日.

[3] Hiroshi Kawabi “Riemannian Wasserstein geometry on the space of Gaussian measures over the Wiener space”, 科研費シンポジウム「マルコフ過程とその周辺」, とくぎんトモニプラザ, 2017 年 1 月 7 日.

[4] Hiroshi Kawabi “Riemannian Wasserstein geometry on the space of Gaussian measures over the Wiener space”, Stochastic Partial Differential Equations and Related Fields, University of Bielefeld, 2016 年 10 月 10 日.

[5] 河備 浩司 “結晶格子上的非対称ランダムウォークの長時間漸近挙動”, 九州確率論セミナー, 九州大学大学院数理学研究院, 2016 年 7 月 30 日.

[6] Hiroshi Kawabi “From non-symmetric random walks on nilpotent covering graphs to rough paths via discrete geometric analysis”, Rough Paths, Regularity Structures and Related Topics, Mathematisches Forschungsinstitut Oberwolfach, 2016 年 5 月 6 日.

[7] Hiroshi Kawabi “Stationary phase for rough differential equations”, Okayama Spring Seminar on Stochastic Analysis, 岡山大学理学部,

2016年3月31日.

[8] 河備 浩司

“ベキ零被覆グラフ上の非対称ランダムウォークの中心極限定理 (I)”, 広島-岡山解析・確率論セミナー, 広島大学大学院工学研究院, 2016年2月23日.

[9] 河備 浩司

“結晶格子上の非対称ランダムウォークの長時間漸近挙動”, 首都大学東京 数理解析セミナー, 首都大学東京大学院理工学研究科, 2016年2月8日.

[10] 河備 浩司

“結晶格子上の非対称ランダムウォークの長時間挙動”, Kunitachi One-Day Symposium on the Recent Developments in the Mathematical Science, 一橋大学, 2016年2月6日.

[11] 河備 浩司

“Rough Path 理論入門: オーバービュー”, 大阪大学理学部数学教室談話会, 大阪大学大学院理学研究科, 2016年1月4日.

[12] 河備 浩司

“結晶格子上の非対称ランダムウォークの長時間挙動”, 静岡確率論セミナー, 静岡大学教育学部, 2015年11月13日.

[13] Hiroshi Kawabi

“Riemannian Wasserstein geometry on the space of Gaussian measures over the Wiener space”, 科研費シンポジウム「Geometry and Probability」, 東京工業大学大学院理工学研究科, 2015年11月9日.

[14] 高津 飛鳥, 河備 浩司

“抽象 Wiener 空間上の Gauss 測度族の Wasserstein 幾何”, 日本数学会秋季総合分科会幾何学分科会, 京都産業大学, 2015年9月15日.

[15] Hiroshi Kawabi

“Functional CLTs for non-symmetric random walks on crystal lattices”, Stochastic Analysis and Applications, 東北大学さくらホール, 2015年9月3日.

[16] Hiroshi Kawabi

“Precise long time asymptotics of non-symmetric random walks on crystal lattices”, Summer School on Dirichlet Forms and Stochastic Analysis, 関西大学システム理工学部, 2015年8月25日.

[17] Hiroshi Kawabi

“Long time asymptotics of non-symmetric random walks on crystal lattices”,

RIMS-camp style seminar: New Trends in Stochastic Analysis, 国際高等研究所, 2015年7月7日.

[18] 河備 浩司

“Long time asymptotics of non-symmetric random walks on crystal lattices”, 阪大確率論セミナー, 大阪大学大学院理学研究科, 2015年6月30日.

[19] 河備 浩司

“Stationary phase for rough differential equations”, 立命館大学数理ファイナンスセミナー, 立命館大学理工学部, 2015年3月5日.

[20] 河備 浩司

“Long time behavior of non-symmetric random walks on crystal lattices”, 東京確率論セミナー, 東京工業大学大学院理工学研究科, 2015年1月26日.

[21] 河備 浩司

“結晶格子上の非対称ランダムウォークの長時間漸近挙動”, 日本数学会北海道支部講演会・支部総会 特別講演, 北海道大学大学院理学研究院, 2014年12月3日.

[21] 河備 浩司

“結晶格子上の非対称ランダムウォークの長時間漸近挙動”, 奈良女子大学理学部数学教室談話会, 奈良女子大学大学院人間文化研究科, 2014年11月18日.

[22] 河備 浩司

“Long time behavior of non-symmetric random walks on crystal lattices and related variational problems” 科研費シンポジウム「The Ninth meeting on Probability and PDE」, 津田塾大学学芸学部, 2014年11月13日.

[23] Hiroshi Kawabi

“Uniqueness of Dirichlet forms related to stochastic quantization under exponential interaction in two dimensional finite volume”, Bielefeld Stochastic Afternoon (SFB701), University of Bielefeld, 2014年10月29日.

[24] Hiroshi Kawabi

“Long time behavior of non-symmetric random walks on crystal lattices”, Workshop on Dirichlet Forms and Stochastic Analysis, TU-Dresden, 2014年10月27日.

[25] Hiroshi Kawabi

“Uniqueness of Dirichlet forms related to stochastic quantization under exponential interaction in two dimensional finite volume”, Workshop: Dirichlet Form Theory

and its Applications, Mathematisches Forschungsinstitut Oberwolfach, 2014 年 10 月 22 日.

[26] 河備 浩司

“ A biased introduction to stochastic quantization equations and related topics ”, RIMS 研究集会「偏微分方程式に付随する確率論的問題」, 京都大学数理解析研究所, 2014 年 9 月 18 日.

[27] Hiroshi Kawabi

“ Stationary phase for rough differential equations ” Swansea-Japanese workshop on Stochastic Analysis, Swansea University, 2014 年 9 月 9 日.

[28] Hiroshi Kawabi

“ Weak convergence of laws of non-symmetric random walks on crystal lattices ”, UK-Japan Stochastic Analysis School, University of Warwick, 2014 年 9 月 5 日.

6. 研究組織

(1) 研究代表者

河備 浩司 (KAWABI HIROSHI)
岡山大学・大学院自然科学研究科・教授
研究者番号 : 80432904

(2) 研究分担者

なし

(3) 連携研究者

廣川 真男 (HIROKAWA MASAO)
広島大学・大学院工学研究院・教授
研究者番号 : 70282788