

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 29 年 6 月 15 日現在

機関番号：13801

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2014～2016

課題番号：26400138

研究課題名(和文) 時間に依存する制約条件付き偏微分方程式の適切性の研究

研究課題名(英文) Well-posedness for partial differential equations with time-dependent constraints

研究代表者

松本 敏隆 (MATSUMOTO, Toshitaka)

静岡大学・理学部・教授

研究者番号：20229561

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,600,000円

研究成果の概要(和文)：バナッハ空間における抽象発展方程式の生成作用素が弱連続な場合に初期値問題の弱解が存在するための必要十分条件を与えた。抽象準線形発展方程式の生成作用素の定義域が稠密でなくかつ一定でない場合に、初期値問題の連続微分可能な解の一意存在を証明した。また、消散条件を満たす変異方程式の初期値問題の時間局所適切性を証明した。さらに、強退化放物型方程式の1次元初期値問題のエントロピー解の一意存在を証明した。フェーズ・フィールドモデルのエネルギー消散解の存在を証明し、解の漸近挙動を調べた。

研究成果の概要(英文)：We consider Cauchy problems for abstract evolution equations in Banach spaces where nonlinear operators are weakly continuous in some sense, and provide a necessary and sufficient condition for existence of weakly continuously differentiable solutions. We also discuss abstract quasilinear problems where the domain of quasilinear operators are neither dense nor constant, and prove a unique existence of continuously differentiable solutions. Under a generalised dissipativity condition, time local well-posedness for Cauchy problems to mutational equations are established. An existence and uniqueness result for entropy solutions to 1-D strongly degenerate parabolic equations is given. Finally phase field models related to grain boundary motions are considered. Existence of weak solutions which reproduce the energy-dissipation is shown and asymptotic behaviours of weak solutions are investigated.

研究分野：実解析学

キーワード：準線形方程式 適切性 リプシッツ発展作用素 変異方程式

1. 研究開始当初の背景

非線形境界条件を伴った偏微分方程式の初期値・境界値問題は、Thieme に習って、トレースの空間と基礎空間との積空間における抽象発展方程式の初期値問題に書き直すことができる。このアプローチでは、初期値・境界値問題を初期値問題として考察出来るというメリットもある反面、作用素の定義域が稠密にならないことによるデメリットも生じる。時間に依存しない半線形問題の場合は、積分化半群の理論によって取り扱い可能で、個体群動態モデル等へ応用されてきた。作用素が時間に依存する場合や準線形作用素の場合は、作用素の定義域が時間や関数に依存しないという特別な場合のみが、連携研究者とその共同研究者、および研究代表者と連携研究者の先行研究によって解決されていたが、一般的な場合は未解決のままであった。

2. 研究の目的

(1) 時間に依存する制約条件を伴った半線形偏微分方程式の研究

時間に依存する非線形境界条件を伴った半線形偏微分方程式の初期値・境界値問題を、積空間における抽象半線形方程式として書き直し、初期値問題の適切性を証明することを目的とした。Oka-Tanaka による先行研究では線形作用素の定義域が稠密でないが一定の場合に半線形問題の弱解の一意存在を証明されていたため、この結果を線形作用素の定義域が時間に依存する場合に拡張することを目指した。

(2) 時間に依存する制約条件を伴った準線形偏微分方程式の適切性の研究

制約条件を伴った準線形偏微分方程式は、(1)と同様に積空間における準線形発展方程式に書き換えることが出来る。その発展方程式の初期値問題の適切性を解明することを計画し、これにより準線形問題の適切性を証明するためのある程度一般的な道具を得ることを目的とした。また、様々な制約条件付き準線形問題の適切性の証明への応用も目指した。

3. 研究の方法

(1) バナッハ空間における弱連続作用素に対する初期値問題の解の一意存在に関する研究では、方程式の差分近似解の収束を証明するために、新たに導入した汎函数に関する弱コンパクト性条件を用いた。

(2) バナッハ空間における抽象準線型発展方程式の適切性の研究では、準線形作用素の定義域が一定でない場合に対応す

るために、準線形作用素の定義域の閉包への射影作用素を導入し、Kato 理論で用いられている同型作用素と準線形作用素の交換子条件を一般化した。また、準線形作用素と同型作用素の和の値域に関する条件も導入した。これらの条件は、準線形作用素の定義域が稠密な場合には自明なもので「見えていない」条件である。これら自然な条件の導入により、研究代表者と連携研究者による先行研究で用いた手法を拡張した。

(3) 変異方程式は距離空間における常微分方程式であり、Aubin や Lorenz らによる先行研究がある。バナッハ空間における非線形作用素に対する消散条件を距離空間の作用素の場合に一般化し、小林たちが、バナッハ空間の場合に用いた証明手法を拡張したものをを用いた。

(4) 退化放物型方程式の研究では、エントロピー三重組を用いて定式化したエントロピー解の一意存在を示すために、H-測度を用いた弱収束法と二重変数法を用いた。

(5) 結晶粒界現象を記述するフェーズ・フィールドモデルの研究では、モデルに含まれる二重井戸型関数を一般化すると共に、近似解の構成に時間離散化法、及び時間離散化法と熱方程式の解法を組み合わせた手法を用いた。近似解の収束証明にはガンマ収束を用いた。

4. 研究成果

(1) 研究代表者と連携研究者は論文において、バナッハ空間における抽象非線形発展方程式の初期値問題を考察した。非線形作用素がある意味において弱連続となる場合に、弱解が存在するための必要十分条件を与えた。この結果は、汎函数族のレベル集合が弱コンパクトであるという条件を、汎函数族の一部に関する保存則の成立条件に緩和することで、Kato-Lai (1984)の結果を一般化した。この結果の応用として、対数項を持つ波動方程式の初期値・境界値問題の弱微分可能な解の存在および、Kato-Lai 理論では扱えない、非線形シュレディンガー方程式の弱微分可能な解の存在を証明した。

(2) 研究代表者と連携研究者は、現在投稿中の論文において、非局所項を持つ非線形初期値・境界値問題であるサイズ構造を持つ個体群モデルへの応用を目指して、バナッハ空間における抽象準線形発展方程式の初期値問題について考察した。サイズ構造モデルを抽象発展方程式の初期値問題として定式化した場合、準線形生成作用素の定義域が稠密でなくか

つ一定でないため、Kato による抽象準線形発展方程式の理論、および研究代表者と連携研究者による先行研究(定義域が稠密でないが一定)は適用できない。研究の方法(2)で述べた手法によって先行研究の結果を拡張し、連続微分可能な解の一意存在を証明した。なお、この結果は時間に依存した形になっていないが、時間に局所リプシッツに依存する場合は、この結果に帰着させることが可能である。応用として、サイズ構造モデルの連続微分可能な解の一意存在を証明した。

- (3) 研究分担者の小林と連携研究者は、Israel J. Math. に受理された(発行年、巻、号未定)論文において、消散条件を満たす変異方程式の初期値問題について考察した。変異方程式は距離空間における発展方程式(常微分方程式)である。上記論文において、変異方程式の初期値問題の時間局所適切性を証明した。この結果は小林達の先行研究を一般化するものである。応用として、この抽象的な結果からバナッハ空間における抽象準線形発展方程式の Kato 理論を導くことが可能であることを証明した。
- (4) 研究分担者の渡邊は、非線形移流項と非線形拡散項の両方を含む退化放物型方程式の1次元初期値問題を考察した。論文では、移流項が空間変数に不連続に依存し、拡散項が空間変数に滑らかに依存する強退化放物型方程式の1次元初期値問題を考察した。エントロピー三重組を用いて適切なエントロピー解を定式化し、エントロピー解の一意存在を証明した。
- (5) 研究分担者の渡邊は共同研究者と共に、結晶粒界現象を記述するフェーズ・フィールドモデルを考察した。論文では、一次元問題の近似解の構成法の安定性を示し、自由エネルギーを消散させる解の存在を証明した。論文では多次元問題の弱解の存在を証明した。論文では、時間に依存する重み付き全変動汎関数の ϵ -収束を証明した。さらに、温度が十分大きく(小さく)取ることで結晶が融解(凝固)し、結晶方位が定まる(定まらない)ことを示した。論文では凝固効果を組み入れた結晶粒界モデルと潜熱効果を組み込んだ熱方程式との連立系に対する初期値境界値問題を考察し、弱解の存在を証明した。さらに、論文ではエネルギー消散性を持つ解の存在を示し、解の漸近挙動を調べた。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者に

は下線)

(雑誌論文)(計8件)

K. Shirakawa and H. Watanabe, Solvability for the non-isothermal Kobayashi-Warren-Carter system, AIMS Mathematics (査読有) 2, 2017, 161-194.
DOI:10.3934/Math.2017.1.161

K. Shirakawa, H. Watanabe and N. Yamazaki, Mathematical analysis for a Warren-Kobayashi-Lobkovsky-Carter type system, 京都大学数理解析研究所講究録(査読無), 1997, 2016, 64-85.
<http://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/~kyodo/kokyuroku/contents/pdf/1997-06.pdf>

H. Watanabe, Existence and uniqueness of entropy solutions to strongly degenerate parabolic equations with variable coefficients, 京都大学数理解析研究所講究録(査読無), 1984, 2016, 23-45.
<http://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/~kyodo/kokyuroku/contents/pdf/1984-03.pdf>

T. Matsumoto and N. Tanaka, Abstract Cauchy problem for weakly continuous operators, J. Math. Anal. Appl.(査読有) 435, 2016, 267-285.
DOI:10.1016/j.jmaa.2015.10.027

K. Shirakawa and H. Watanabe, Large-time behavior for a PDE model of isothermal grain boundary motion with a constraint, Dynamical System and Differential Equations (査読有), AIMS Proceedings 2015, 2015, 1009-1018.
DOI:10.3934/proc.2015.1009

Y. Kobayashi, N. Tanaka and Y. Tomizawa, Nonautonomous differential equations and Lipschitz evolution operators in Banach spaces, Hiroshima Math. J.(査読有), 45, 2015, 267-307.
<http://projecteuclid.org/euclid.hmj/1448323767>

H. Watanabe and K. Shirakawa, Stability for approximation methods of the one-dimensional Kobayashi-Warren-Carter system, Mathematica Bohemica (査読有), 139, 2014, 381-389.
http://mb.math.cas.cz/full/139/2/mb139_2_22.pdf

K. Shirakawa, H. Watanabe and N. Yamazaki, Phase-field systems for grain boundary motions under isothermal solidifications, Adv. Math. Sci. Appl., (査読有), 24, 2014, 353-400.

[学会発表](計 30 件)

渡邊紘、変数係数を持つ非局所的強退化放物型方程式系に対する時間大域解、日本数学会、2017年3月27日、首都大学東京(東京都・八王子市)

白川健、渡邊紘、S. Moll、非斉次 Dirichlet 境界条件を組み入れた結晶粒界運動のフェーズ・フィールドモデル、日本数学会、2017年3月27日、首都大学東京(東京都・八王子市)

渡邊紘、非局所的放物型・双曲型保存則系に対する適切性、第42回発展方程式研究会、2016年12月25日~2016年12月27日、日本女子大学(東京都・文京区)

白川健、渡邊紘、S. Moll、結晶粒界運動の非等方的フェーズ・フィールドモデルにおけるエネルギー消散性、第42回発展方程式研究会、2016年12月25日~2016年12月27日、日本女子大学(東京都・文京区)

渡邊紘、変数係数を持つ非局所的強退化放物型方程式系、日本数学会、2016年9月18日、関西大学(大阪府・吹田市)

渡邊紘、Well-posedness for nonlocal parabolic-hyperbolic conservation laws, PDE Summer Seminar in Fukuoka、2016年9月5日、福岡大学セミナーハウス(福岡県・福岡市)

Y. Kobayashi and N. Tanaka, Evolution problems in metric spaces and dissipativity conditions, The fifth Asian conference on Nonlinear Analysis and Optimization, 2016年8月1日~2016年8月6日、Toki Messe, (新潟県・新潟市)

H. Watanabe, Parabolic-hyperbolic conservation laws with variable and nonlocal type coefficients, The 11th AIMS Conference on Dynamical Systems, Differential Equations and Applications, Special Session 78, 2016年7月1日~2016年7月5日、Orlando, Florida (アメリカ)

松本敏隆、サイズ構造モデルへの抽象準線形理論的アプローチ、第200回広島数理解析セミナー、2016年5月27日、広

島大学理学部(広島県・東広島市)

松本敏隆、田中直樹、サイズ構造モデルへの準線形理論的接近法、日本数学会、2016年3月19日、筑波大学(茨城県・つくば市)

渡邊紘、変数係数を持つ強退化放物型方程式の BV-エントロピー解に対する連続的依存性、日本数学会、2016年3月19日、筑波大学(茨城県・つくば市)

白川健、渡邊紘、S. Moll、異方性を加味した結晶粒界運動のフェーズ・フィールドモデルに対するエネルギー消散性、日本数学会、2016年3月19日、筑波大学(茨城県・つくば市)

渡邊紘、白川健、結晶粒界の非等温系モデルのエネルギー消散性と漸近挙動、第41回発展方程式研究会、2015年12月25日~2015年12月27日、日本女子大学(東京都・文京区)

小林良和、田中直樹、Mutational equation に対する適切性定理について、第41回発展方程式研究会、2015年12月25日~2015年12月27日、日本女子大学(東京都・文京区)

松本敏隆、田中直樹、弱連続作用素に対する抽象的 Cauchy 問題、第13回浜松偏微分方程式研究集会、2015年12月22日、静岡大学・工学部(静岡県・浜松市)

松本敏隆、田中直樹、弱連続作用素に対する抽象的 Cauchy 問題について、ポテンシャル論セミナー、2015年12月18日、名城大学(愛知県・名古屋市)

松本敏隆、田中直樹、Abstract Cauchy problem for weakly continuous operators, 第616回応用解析研究会、2015年12月5日、早稲田大学(東京都・新宿区)

渡邊紘、変数係数を持つ放物型・双曲型単独保存則に対する適切性、第6回核酸と移流の数理、2015年12月5日、愛媛大学(愛媛県・松山市)

渡邊紘、白川健、結晶粒界現象を記述する非等温系数学モデルに対する解の漸近挙動、日本数学会、2015年9月16日、京都産業大学(京都府・京都市)

白川健、渡邊紘、S. Moll、異方性を加味した結晶粒界運動の Kobayashi-Warren-Carter 型数学モデル、日本数学会、2015年9月16日、京

都産業大学(京都府・京都市)

- ⑳ Y. Kobayashi, N. Tanaka and Y. Tomizawa, Lipschitz evolution operators, VII Symposium on Nonlinear Analysis, 2015年9月15日、Nicolaus Copernicus University, Torun (ポーランド)
- ㉑ Hiroshi Watanabe, Solvability of some degenerate parabolic equations with convective terms, Equadiff 2015, 2015年7月6日~2015年7月10日、Universite Claude Bernard Lyon1, Lyon (フランス)
- ㉒ 渡邊 紘、非等温条件下での Warren-Kobayashi-Lobkovsky-Carter 型の結晶粒界モデル、表面・界面ダイナミクスの数理 IX, 2015年4月23日~2015年4月24日、東京大学大学院数理科学研究科(東京都目黒区)
- ㉓ 渡邊 紘、変数係数を持つ強退化放物型方程式の可解性、日本数学会、2015年3月24日、明治大学(東京都・千代田区)
- ㉔ 白川健、渡邊 紘、非等温条件下における結晶粒界現象のフェーズフィールドモデル、日本数学会、2015年3月24日、明治大学(東京都・千代田区)
- ㉕ 渡邊 紘、Existence and uniqueness of entropy solutions to strongly degenerate parabolic equations with variable coefficients, RIMS 研究集会「抽象発展方程式理論から見た偏微分方程式に関する評価方法の再考」, 2014年10月22日~2014年10月24日、京都大学数理解析研究所(京都府・京都市)
- ㉖ 松本敏隆、田中直樹、弱連続作用素に対する抽象的 Cauchy 問題について、日本数学会、2014年9月28日、広島大学(広島県・東広島市)
- ㉗ 渡邊 紘、白川健、Allen-Cahn 型方程式と結晶粒界モデルによる連立系の時刻無限大における解挙動、日本数学会、2014年9月28日、広島大学(広島県・東広島市)
- ㉘ 白川健、渡邊 紘、凝固現象と結晶粒界現象の等温系カップリングモデルにおけるエネルギー消散解、日本数学会、2014年9月28日、広島大学(広島県・東広島市)
- ㉙ Hiroshi Watanabe, Strongly degenerate parabolic equations with diffusion coefficients depending on the spatial variable, The 10th AIMS Conference on

Dynamical Systems, Differential Equations and Applications, 2014年7月7日~2014年7月11日、The Universidad Autonoma de Madrid, Madrid (スペイン)

6. 研究組織

(1) 研究代表者

松本 敏隆 (MATSUMOTO, Toshitaka)
静岡大学・理学部・教授
研究者番号: 20229561

(2) 研究分担者

小林 良和 (KOBAYASHI, Yoshikazu)
中央大学・理工学部・教授
研究者番号: 80092691

渡邊 紘 (WATANABE, Hiroshi)
大分大学・工学部・准教授
研究者番号: 30609912

(3) 連携研究者

田中 直樹 (TANAKA, Naoki)
静岡大学・理学部・教授
研究者番号: 00207119