様　式　C－19、F－19－1、Z－19　（共通）

科研費
KAKENHI

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 ２９ 年　 ６ 月　 ２ 日現在

機関番号：１５５０１
研究種目：基盤研究(C)（一般）
研究期間：2014～2016
課題番号：２６４００１４１

研究課題名（和文）閉リーマン面上の特殊線形系と Weierstrass 点

研究課題名（英文）Special linear systems and Weierstrass points on compact Riemann surfaces

研究代表者
加藤　崇雄（Kato, Takao）

山口大学・その他部局等・名誉教授

研究者番号：１００１６１５７

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　2,200,000円

研究成果の概要（和文）：閉リーマン面の研究における中心的課題の一つとして，その上の有理型函数の存在性および等角不変量を介してのリーマン面の分類問題がある．本研究では与えられた空隙列をもつ Weierestrass 点と自己等角写像との関係，特にリーマン面が他のリーマン面の２葉の被覆になる場合に関する成果，gonality 列の傾斜不等式が成立しないリーマン面に関する成果，および，Clifford 指数を計算する線形系の次数が最大になるリーマン面の特徴づけに関する成果を得た．

研究成果の概要（英文）：One of main themes of the study of compact Riemann surfaces is a classification problem of Riemann surfaces by the existence of meromorphic functions on them and conformal invariants. We have studied this theme. We have gotten results concerning a relation between Weierstrass points with prescribed gap sequences and involutions of Riemann surfaces, a behavior of gonality sequences, in particular, violating the slope inequality of them, and a characterization of Riemann surfaces on which the Clifford index is computed maximally.

研究分野：数学

キーワード：閉リーマン面　代数曲線　gonality 列　Weierstrass point

１．研究開始当初の背景

(1) 閉リーマン面の研究においてその上の有理型函数の存在性，もしくは等角不変量を介してのリーマン面の分類問題は中心的研究課題のひとつである．C を閉リーマン面，n,r を自然数とするとき $W_n{}^r(C)$ を C 上の次数 n，次元 r の因子全体の Jacobi 多様体内の像とする．このとき，$W_n{}^r(C)$ の構造を解明することによってリーマン面の１つの分類が得られる．しかし，一般の n,r を与えたときにその構造を解明することは少なくとも現段階では殆ど不可能である．

(2) 重要な等角不変量として Weierstrass 点がある．この歴史は古く 19 世紀末にまで遡るが A. del Centina による綜合報告 ``Weierstrass points and their impact in the study of algebraic curves: a historical account from the ``Lueckensatz" to the 1970s, Ann. Univ. Ferrara (2008) vol.54, pp.37-59" **で 1970 年代までの歴史が 83 篇に及ぶ引用文献によって述べられると共にその報告の末尾に「1980 年以降の論文数はそれ以前 30 年間の論文数の 3 倍以上である」と結ばれている．研究の方向性は多岐にわたるが，とりわけ本研究に関連の深いものとして，ここではリーマン面の自己等角写像と空隙列との関連を扱った論文として**
Coppens, M., Weierstrass points with two prescribed non-gaps, Pacific J. Math., **131** (1988), 71--104.**,** A. Del Centina, On certain remarkable curves of genus five, Indag Mathem, N.S., **15** (2004), 339-346. **を挙げておく．**

(3) $W_n{}^r(C)$ をより具体的に研究するために gonality という概念を導入する．C 上の線形束のうち P^r への射を与えるものを考え，そのような線形束が存在する最小の d を $d(C,r)$ と表す．列$\{d(C,r)\}_{r>0}$, を gonality 列という．もちろん，この量は等角不変量である．Brill-Noether 理論の帰結として，一般の C に対しては $d(C,r)$ が決定されている．また C が hyperelliptic, bielliptic などの場合も容易に決定できる．さらにこれらの場合では，不等式 $(r+1)d(C,r)-rd(\mathbf{C,r}+1)\geqq 0$ がすべての r について成り立つ(これを傾斜不等式と呼ぶ)．また，gonality 列は Clifford 指数，Brill-Noether 理論と密接な関わりがある．その文脈で Lange-Newstead はリーマン面上のベクトル束に関する Clifford 指数の定義を試みたがその前提として傾斜不等式の成立を仮定している．

(4) 前項の末尾で述べた Clifford 指数もまた重要な等角不変量のひとつである．これは c=min{d-2r:次数 $d<g$, 次元 r の線形系が存在する} と定義される．$c=d-2r$ をみたせば $d<2c+5$ であることが知られているが，一般の C では $d=c+2$ である．したがって，$d>c+2$, 特に $d=2c+3$ (c が奇数), $d=2c+4$ (c が偶数) となる C の特徴づけに興味がある．先行研究として $d=2c+3$ の場合が D. Eisenbud, H. Lange, G. Martens, F.-O. Schreyer: The Clifford dimension of a projective curve, compos. Math. 72 (1989), 173 - 204 において詳細に調べられている．

２．研究の目的

(1) 研究開始当初の背景欄(2)で述べた Weierstrass 点の研究については，Coppens，Del Centina の先行研究を踏まえつつ閉リーマン面の自己等角写像と Weierstrass 空隙列との関係をさらに追及することを目的とする．
(2) 研究開始当初の背景欄 (3) で述べた gonality 列に関してはごく最近 H. Lange **と** G. Martens **によって傾斜不等式が成立しない面の例が得られた（実際には** H. Lange, G. Martens, On the gonality sequence of an algebraic curve, manuscripta math. **137** (2012) 457--473 **として刊行されている）．本研究ではこのような例を系統的に作ることと，Brill-Noether 数との関係を考察したい．また，C が位数 2 の自己等角写像をもつ場合について $d(C,r)$ を求めたい．**
(3) 研究開始当初の背景欄 (4) で述べた Clifford 指数に関しては d=2c+4 の場合について研究する．

３．研究の方法

(1) 山口大学所属の分担者とは随時セミナーを行い，研究の進捗状況の発表及び情報交換を行う．
(2) 学外の分担者（米田，大渕）は相互に訪問し研究打ち合わせを行う．
(3) その他，各分担者との日常の情報交換には電子メールを最大限に活用する．
(4) 代表者もしくは分担者が複素解析学または代数幾何学関連の国際研究集会あるいは海外の学会で成果を発表する．

４．研究成果

(1) 研究開始当初の背景（１）で引用した Del Centina の Indag. Math. 誌の論文に於いて彼は次の主張をした「種数 5 の閉リーマン面 C が空隙列 {1,2,3,5,9} の Weierstrass 点を 24 点もち，さらに位数 2 の自己等角写像でそれによる C の商リーマン面が種数 1 になるもの（bielliptic involution という）が 3 つ存在するならば C は種数 3 の Fermat 曲線の 2 葉被覆になり 3 通りの等角同値類が存在する」この主張に対して本研究に於いて我々は雑誌論文④ によって，bielliptic involution の存在の仮定は不要である（つまり当該空隙列をもつ Weierstrass 点が 24 点存在すれば必然的に 3 つの bielliptic involution が存在する）ことを示した．
(2) 種数 g の閉リーマン面 C が位数 2 の

自己等角写像 f をもち，その商リーマン面の種数を h とするとき $g>4h$ ならば f の不動点は Weierstrass 点となり，Weierstrass 列は h-hyperelliptic 半群（定義は省略）になることが分かる．1993 年に F. Torres は $g>6h+3$ ならば逆（つまり，C が Weierstrass 列が h-hyperelliptic 半群である点をもてば，その点を不動点とする位数 2 の自己等角写像が存在すること）を示した．本研究では，$g=6h+2$，$6h+3$ でも逆が成り立つことを示し，$g<6h+2$ では成立しない例があることを示した．

(3) 研究開始当初の背景(3) で述べた gonality 列について研究した．雑誌論文③ においては $r=2,3$ の段階で傾斜不等式が成立しないリーマン面の例を系統的に作成した．雑誌論文①，⑥ では次のことを示した．種数 g の閉リーマン面 C が位数 2 の自己等角写像 f をもち，その商リーマン面 S の種数を h とする．このとき，$g>6h-4$ ならば C の gonality 列は S の gonality 列によって完全に決定されること証明した．この場合，特に $r=h,\cdots,g-3h$ ならば $d(C,r)=2(r+h)$ になる．さらに $g>6h+2$ ならば逆（つまり，$d(C,r)=2(r+h)$，$r=h,\cdots,g-3h$ ならば C は位数 2 の自己等角写像をもつこと）を示した．このことと雑誌論文③で得られた例を併せるとさらに多くの傾斜不等式が成立しないリーマン面の例を系統的に得ることができる．

(4) 研究開始当初の背景(4) で述べた Clifford 指数について研究した．Eisenbud-Lange-Martens-Schreyer によると c が奇数の場合 $d=2c+3$，$d-2r=c$ となる線形系が存在するリーマン面では $g=2c+4$，gonality は $c+3$，$c+2<d<2c+3$ ならば $d-2r>c$ などが成立することが示されている．さらに $d=2c+3$，$d-2r=c$ となる線形系は唯一で半標準であるなどの結果が得られている．本研究では c が偶数の場合を考察した．この場合でも $d=2c+4$，$d-2r=c$ となる線形系は唯一で半標準になることは証明できたが，gonality が $c+2$ になってしまうこと（つまり，$d=c+2$，$r=1$，$d-2r=c$ になる），そのような線形系が無限個ありうることがネックになり，「$c+2<d<2c+4$ では $d-2r>c$」では示すことができなかった．ただし，$c=4,6,8$ では示すことができた．

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計 8 件）

① A characterization of double coverings of curves, T. Kato, G. Martens, manuscript math. *150* (2016), 465 - 474. (査読有)

② Circular symmetrization, subordination and arclength problems on convex functions, M. Okada, S. Ponnusamy, A. Vasudevarao, H. Yanagihara, Math. Nachr. *289* (2016), 1044 - 1051. (査読有)

③ Algebraic curves violating the slope inequalities, T. Kato, G. Martens, Osaka J. Math. **52** (2015) 423 - 437. （査読有）

④ A curve of genus 5 having 24 Weierstrass points of weight 5, T. Kato, Hokkaido Math. J., *44* (2015) 165 - 173. (査読有)

⑤ The Weierstrass semigroups on double covers of genus two curves, T. Harui, J. Komeda, A. Ohbuchi, Tsukuba J. Math. **38** (2015), 201 - 206. （査読有）

⑥ The gonality sequence of a curve with involutions, T. Kato, G. Martens, Arch. Fu”r Math. **103** (2014), 111 - 116. （査読有）

⑦ Weierstrass points with first non-gaps equal to n and n+2, T. Kato and M. Coppens, Kyushu J. Math. **68** (2014) no. 1 139-147. （査読有）

⑧ Variability Regions of close-to-convex functions, T. Kato, T. Sugawa and L-M. Wang, Annales Polonici Mathematici, *111* (2014) 89 - 105 (査読有)

〔学会発表〕（計 3 件）

① Torres' bound for gamma hyperellipticity, Takao Kato 2017. 03. 17, Conference on algebraic geometry and coding theory, Gyeongsang National University, Chinju (Korea).

② Yamada's method on quasiconformal variations, 柳原宏 2016. 02. 21 等角写像論・値分布論研究集会, 千葉大学（千葉県, 千葉市）

③ Slope inequality for gonality sequences, Takao Kato 2015. 02. 12, Conference on algebraic geometry and coding theory, Gyeongsang National University, Chinju (Korea).

〔図書〕（計 0 件）

〔産業財産権〕

○出願状況（計 0 件）

名称：
発明者：
権利者：
種類：

番号：
出願年月日：
国内外の別：

○取得状況（計　0　件）

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
取得年月日：
国内外の別：

〔その他〕
ホームページ等

６．研究組織
(1)**研究代表者**
加藤　崇雄 (KATO, TAKAO)
山口大学・その他部局等・名誉教授
研究者番号：10016157

(2)**研究分担者**
大渕　朗(OHBUCHI, AKIRA)
徳島大学・大学院理工学研究**部・教授**
研究者番号：　10211111

柳原　宏 (YANAGIHARA, HIROSHI)
山口大学・創生科学研究科・教授
研究者番号：30200538

米田　二良 (KOMEDA, JIRYO)
神奈川工科大学・基礎・教養教育センター・教授
研究者番号：90162065