

平成 30 年 5 月 30 日現在

機関番号：32612

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2014～2017

課題番号：26400148

研究課題名(和文) ランダム作用素の固有値分布と関連する極限定理

研究課題名(英文) Distribution of eigenvalues of random operators and related limit theorems

研究代表者

南 就将 (MINAMI, Nariyuki)

慶應義塾大学・医学部(日吉)・教授

研究者番号：10183964

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,600,000円

研究成果の概要(和文)：(1)減衰するホワイトノイズをポテンシャル項とする1次元のシュレーディンガー作用素 H について、減衰因子が2乗可積分である場合に、そのスペクトルの性質を決定した。また減衰因子が2乗可積分でない場合に、 H のスペクトルの1部についてその性質を決定した。
 (2)成人男女の間に緩やかな棲み分けがあるという仮説を取り入れた数理モデルに基づいて2013年の我国には風疹流行の素地があったことを示した。また女子中学生のみに予防接種を行うというかつての政策を長期間続けた場合に想定される帰結を示した。
 (3)感染症疫学における「世代間隔」の概念を明確にするための確率モデルを構成した。

研究成果の概要(英文)：(1) 1-dimensional Schroedinger operator H with decaying white noise potential is considered, and its spectral properties are determined when the decaying factor is square integrable. Also, the property of a part of the spectrum of H is determined when the decaying factor is not square integrable.
 (2) Based on a mathematical model which incorporates a hypothesis that adult males and females are mildly segregated in their social life, it is shown that a condition is ready for the 2013 rubella outbreak in Japan. By another mathematical model, possible consequences of the rubella vaccination limited to schoolgirls were shown.
 (3) A stochastic model is constructed in order to clarify the notion of "generation interval" in infectious disease epidemiology.

研究分野：確率論とその数理物理学および数理疫学への応用

キーワード：ランダム作用素 スペクトル統計 一般化シュレーディンガー作用素 感染症数理モデル 世代間隔

1. 研究開始当初の背景

ランダム作用素,特にランダムなシュレーディンガー作用素は,空間的に一様な乱れをもつ物質中を動く電子のモデルとして,定常な確率場を係数(シュレーディンガー作用素の場合はポテンシャル)とする場合について主に研究されていた。その興味を中心はアンダーソン局在の厳密な証明と,状態密度関数の評価であったが,S. A. Molchanov(引用文献),および本研究代表者(以下,代表者と略す)の論文(引用文献)が端緒となって,スペクトル統計(固有値のランダムな配列状態を確率論的に特徴付ける問題)に対する関心が高まっていた(例えば引用文献)。定常なランダム・ポテンシャルをもつシュレーディンガー作用素の場合は,アンダーソン局在に起因するポアソン型のスペクトル統計のみが得られていたが,例えばランダムなポテンシャルが減衰因子をもつ場合には,ランダム行列理論で知られているものと同じスペクトル統計も得られていた(引用文献)。また Ramirez, Rider, Virag(引用文献)はベータ・アンサンブルと呼ばれる三重対角型のランダム行列のスペクトルが,そのスケール極限において,正の無限大に発散する一様電場をホワイトノイズにより摂動したものをポテンシャルとする半直線上の"シュレーディンガー作用素"の"スペクトル"(stochastic Airy spectrum)であることを見出していた。その後代表者はこの"シュレーディンガー作用素"(stochastic Airy operator)が2乗可積分な関数から成るヒルベルト空間内の自己共役作用素として自然に実現されること,したがって上記の stochastic Airy spectrum は通常の意味でのスペクトルと考えてよいことを示した(引用文献)。以上のような背景において代表者は係数が必ずしも空間的に一様でないランダム性をもつ場合にまでランダム作用素の研究対象を拡張することの必要性を認識し,また離散型のランダム作用素(ランダムな差分作用素)からの連続極限としてランダムなシュレーディンガー作用素を捉えなおすことに関心を持つに至った。一方,代表者はランダム作用素研究の今後の新展開のためには,自然科学諸分野への応用の可能性を探ることが重要であると考えていた。代表者は2007年に筑波大学数理物質科学研究科から慶應義塾大学医学部に移籍してから,感染症の数理モデルの研究を開始した。感染症の流行という現象への数学的アプローチには,微分方程式によるもの,確率過程論によるものに加えてランダムなグラフあるいはネットワークによるモデル化の方法がある。ランダム・グラフのスペクトルを通じてランダム作用素の研究が将来感染症疫学にも貢献できる可能性があるため,本研究の枠内で数理モデルに基づく感染症流行の研究も平衡して進めていきたいと考えた。

2. 研究の目的

課題申請時における当初の研究目的は以下のとおりであった。このうち項目(1)から(4)は比較的密接に関連しているが(5)から(7)は個別的な課題である。

(1)一般論を整備するために,直線上のラドン測度 $m(dx)$ に関する微分,および超函数的な特異性を持つポテンシャル項を含む2階の作用素に対するスペクトル理論を展開する。測度 $m(dx)$ が連続であるか離散的であるかに応じて作用素は2階微分または2階差分を表すので,これにより離散からの連続極限を定式化する枠組みが得られると考えた。

(2)前項の枠組みにおいて,ベータ・アンサンブルの連続極限の問題に新しい定式化と証明を与える。

(3)前述した stochastic Airy operator のスペクトルは,ブラウン運動の見本関数を用いて構成されるある2次形式から最大最小原理により求められる。この表現を用いて stochastic Airy operator のスペクトルを1次元の点過程として確率論的に特徴付けることを試みる。

(4)前述の stochastic Airy operator とは逆に,一様電場が負の無限大に発散する場合は代表者がすでに引用文献において研究し,スペクトルの性質も明らかにされているが,この場合におけるスペクトル統計の問題に取り組む。特にポアソン型と異なるスペクトル統計が得られるかどうかの問題である。

(5)独立だが同分布でない確率変数族をポテンシャルとする離散型シュレーディンガー作用素(アンダーソン・モデル)に対するスペクトル統計がどのような付加的条件の下に可能であるかを検討する。

(6)引用文献において「小さな区間にランダム作用素の固有値が2つ以上含まれる確率」が評価され(Minami estimate と呼ばれている),理論的に重要な役割を果たしたが,「互いに重ならない2つの区間のそれぞれにランダム作用素の固有値が含まれる確率」の評価(decorrelation estimate と呼ばれている)にも応用があり,F. Klopp(引用文献)によりアンダーソン局在を前提として得られている。一方 Minami estimate はアンダーソン局在の有無とは無関係に成立するものなので,decorrelation estimate についても引用文献とは異なるアプローチの可能性が。この点を明らかにする。

(7)感染症疫学においては「基本再生産数」 R と呼ばれる量が,流行が起きるための指標として重要な役割を果たす。引用文献において Prakash 等はランダム・グラフ上の力学系を線形化することにより, R がグラフ上のラプラス作用素の第1固有値を用いて表示されることを示した。彼らは離散時間の力学系を考えているが,これを連続時間で考えるなど,そのアイデアを多角的に検討することで感染症数理モデルとランダム作用素の

研究の統合を試みる。

3. 研究の方法

本課題の研究方法は理論的・数学的考察によるものであり、フィールド調査、実験、コンピュータによる数値計算などは行わなかった。一方、過去の研究成果を調べ、研究手法についての情報を得るための図書の購入や電子図書館等を通じての文献調査を日常的に行った。また、国内外の研究集会に参加し、また外国人研究者を招聘して、本研究課題に関連する研究の現況についての情報収集を行った。以下、研究目的のために試みた方法を具体的に述べる。

(1) 研究目的(1)について。

直線上のラドン測度に関する微分を含む2階の作用素についてはKotani(引用文献)においてある程度の一般論が展開されており、またホワイトノイズ状のポテンシャル項を含むシュレーディンガー作用素については代表者の論文(引用文献)において考察されている。本研究の目的のためにはこの両者を統合する形で理論の整備を行う必要があるが、そのためにStone(引用文献)に代表されるような古典的な研究を詳細に見直すことを試みた。

(2) 研究目的(2) - (5)について。

2014 - 2016の各年度に、連携研究者の上木直昌氏、中野史彦氏と共同で「ランダム作用素のスペクトルと関連する話題」という研究集会を開催し、これらの研究目的に近いテーマを追っている研究者たちと情報交換を行った。また2016年度にはHagen(ドイツ)で開催された研究集会"Mathematical Physics Day"に参加し、各国のランダム作用素と情報交換を行った。

(3) 研究目的(6)について。

decorrelation estimate について研究業績を挙げているCh. Shirley氏を招聘して研究上の詳しい情報提供を受けた。

(4) 研究目的(7)について。

数理モデルによる感染症研究の我が国における第一人者である西浦博氏により2014, 2015, および2016年に開催された研究集会において研究の中間発表を行い、討論を行った。

4. 研究成果

(1) ある種の一般化 Sturm-Liouville 作用素のクラスの設定とその固有関数展開理論。

成果の概要。

伝統的な Sturm-Liouville 作用素とは、2階微分の項と、掛け算作用素として働く0階の項(ポテンシャル項)から成る常微分作用素であり、それに対する固有関数展開についてはWeyl, Stone, Titchmarsh, Kodairaによる完成された理論(いわゆるWeyl理論)がある。本研究においては Sturm-Liouville 作用素の2階微分の項を、通常の微分に引き続いて測度 $m(dx)$ に関する微分を行う作用素でおきかえ、またポテンシャル項をある種の超

関数でおきかえたものを考察の対象とした。その結果、この作用素は測度 $m(dx)$ について2乗可積分な関数から成るヒルベルト空間における対称作用素となり、Weyl理論が成立することがほぼ確認された。また測度とポテンシャル項が収束すれば対応するスペクトル測度も収束することがある限定的な条件の下で示された。しかしながら、測度 $m(dx)$ が有限個の点測度のみから成るケース(このとき対応する一般化 Sturm-Liouville 作用素は三重対角行列と同等である)を上記のような極限定理が成り立つ形で共通の枠組みに含めることには成功しなかった。

成果の位置づけとインパクト。

Sturm-Liouville 作用素のスペクトル理論は現在でも詳細な研究が続けられており、超関数的なポテンシャル項をもつ作用素に関する研究論文も近年散見されるようになった。しかしながらこうした試みは互いに独立であり、また2階微分の項をも合わせて一般化する研究はなされていない。本研究の試みはこれらを統合する方向への第1歩である。

今後の展望。

測度 $m(dx)$ が有限個の点測度のみから成る場合は、上記の枠組みに含めるための解釈の仕方に任意性があることが一つの障害となっている。この問題を解決するには、作用素が必ずしも本質的に自己共役でない場合(いわゆる極限円型)の場合を考察の対象に含めることが必要と思われる。また、スペクトル測度に対する極限定理を考える際に、測度とポテンシャル項の収束モードとして互いに相性の悪いものを考えることになるため、今後詳しい基礎的な研究が必要となるであろう。

(2) 減衰因子をもつホワイトノイズをポテンシャルとするシュレーディンガー作用素のスペクトル解析。

成果の概要。

ホワイトノイズ(ブラウン運動の見本関数の形式的な導関数)に減衰因子 $a(x)$ をかけたものをポテンシャル項とするシュレーディンガー作用素 H を考察し、次の結果を得た。減衰因子 $a(x)$ が2乗可積分のとき、 H は2乗可積分関数から成るヒルベルト空間における対称作用素として実現され、確率1で自己共役である。スペクトルの正の部分は有限個の固有値だけから成る。一方、任意の負の数 k に対して、 H のスペクトルの、 k よりも下の部分は有限個の固有値だけから成る。特に H は下に有界な作用素で、 H のスペクトルの負の部分は離散的な固有値だけから成る。ただし、これらの固有値が0に集積する可算無限列をなすか、有限個であるかは決定できなかった。一方、減衰因子が単調減少かつ連続的微分可能だが2乗可積分でない場合にも H は確率1で自己共役となる。さらに正または無限大の定数 c が存在し、 H は0と c の間のエネルギー区間において点スペクトルのみをもつ。 c が有限のとき、 c より上のエネルギー区間において H は特異連続スペクトルを持

つことが強く示唆されるが、完全な証明にはいたらなかった。またHのスペクトルの負の部分については、それが下に有界であるか否かも含めて何もわからなかった。

成果の位置づけとインパクト。

本研究で扱った作用素HはKotaniとUshiroya(引用文献)がすでに考察していたモデルのランダム・ポテンシャルの部分ホワイトノイズで置き換えたものだが、スペクトルの正の部分に関しては解析の方法も含めてほぼ同様の結果となった。一方、スペクトルの負の部分について、KotaniとUshiroyaは摂動理論からの一般的帰結として、有限個の固有値のみから成る、と結論しているが、ランダム・ポテンシャルをホワイトノイズで置き換えた場合、摂動理論が適用されないため、モデルに固有の具体的な解析を行わなければならない。このように、ホワイトノイズから作られるポテンシャル項を持つ作用素は従来のスペクトル理論ではカバーされない問題を提起している。

今後の展望。

Hのスペクトルの負の部分の研究に引き続き取り組むべきである。またHについてKotaniとNakano(引用文献)が示したようなスペクトル統計が成り立つかどうかは確かめられるべき問題と考えられる。さらに、作用素Hの定義は確率解析の高度な理論なしに可能だが、その詳しい解析の道具として近年研究されているrough path理論が有用でないかを検討すべきだと考えている。

(3) 数理モデルに基づく風疹流行の考察。

成果の概要。

我国では20世紀の後半に女子中学生のみを対象として風疹の予防接種が行われていた期間が十数年続いた。そのため、現在風疹に対する抗体保有率は成人の集団においては男女間に顕著な差がある。一方、男女を平均すると、成人集団全体では抗体保有率は風疹の大流行を抑えるのに十分なだけ高いと考えられる。そこで、成人間の日常的な接触においては男女間にゆるやかな棲み分けがあって、成人男性がそれ自体で閉鎖集団を近似的に構成すると仮定した数理モデルを構成し、2013年の我国で起こった風疹の流行を根拠づけることができた。さらに別のモデルによって、女子中学生に限定したワクチン接種政策を長期間続けた場合に予測される帰結を考察した。乳児にワクチン接種を行う場合、接種率が高くないと高年齢層における抗体保有率が下がるという逆説的な効果があるが、女子中学生に接種対象を限定すると、ワクチン接種率が高くなっても、本来守られるべき成人女子集団における抗体保有率が上昇することが示された。

成果の位置づけとインパクト。

数理モデルを用いた感染症研究では、異なる年齢集団間での接触頻度に注目することはあるが、性感染症でない病気について男女間の接触頻度を問題にした研究の例は少ない。

また女子中学生に限定した予防接種政策の長期的帰結を数理モデルにより論じた研究例もないと思われる。この意味で、本研究は新しい問題提起をしている。

今後の展望。

本研究では応用上の意味がある結論を導く必要性から、本来数学的な証明を要する論点を仮説で置き換えた部分がある。このような点を今後完成させていく必要がある。また予防接種政策については、風疹における成人女性のように本来最も守られるべき集団を対象を限定すればよいのか、病気そのものを根絶すべきなのか、という価値観に関わる問題があるため、今後はさらに多面的な論点を数理モデルに取り入れていく必要がある。

(4) 感染症疫学における「世代間隔」の確率モデルによる定義。

成果の概要。

世代間隔とは集団中の1個体が感染を受けてから別の個体に2次的に感染させるまでの経過時間のことである。感染症疫学の専門書ごとに異なる表現で述べられているこの概念に明確な意味を与えるために、1次感染個体は、他者への感染性を時間とともに変化させながら、ポアソン過程にしたがう時系列において感受性者と接触するというモデルを考えた。このモデルを用いて、流行初期における新規感染者数の指数増大度と基本再生産数とを結びつけるのは、従来考えられていたような世代間隔の確率分布そのものではなく、集団における接触頻度をゼロに近づけたときのその極限分布であることがわかった。

成果の位置づけとインパクト。

数理モデルによる感染症研究においては、微分方程式を用いたモデルを立てながら確率論的解釈を行う場合が多い。その際確率的な概念と数式が必ずしも対応しないため、その解釈に任意性が伴うことがある。本研究では始めから確率モデルを構成することによって概念の理論的な意味が明確になった。

今後の展望。

実際の流行現象を観察して世代間隔を測定するためには、感染を受けた人の行動を過去にさかのぼって追跡し、誰と接触したかを推測しなければならない。本研究のモデルではこのような「後ろ向き」の意味での世代間隔を自然な形で定義できないため、今後モデルを適切に拡張する必要があると思われる。

<引用文献>

S.A. Molchanov, The local structure of the spectrum of the one - dimensional Schroedinger operator, Commun. Math. Phys., vol.78, 1981, 429-446.

N. Minami, Local fluctuation of the spectrum of a multidimensional Anderson tight binding model, Commun. Math. Phys., vol.177, 1996, 709-725.

F. Germinet, F. Klopp, Enhanced Wegner and Minami estimates and eigen-

value statistics of random Anderson models at spectral edges, Ann. Inst. Henri Poincare, vol.14, 2013, 1263-1285.

S. Kotani, F. Nakano, Level statistics of one-dimensional Schroedinger operators with random decaying potential, arXiv: 1210.4224.

J.A. Ramirez, B. Rider, B. Virag, Beta ensembles, stochastic Airy spectrum, and a diffusion, J. Amer. Math. Soc., vol.24, 2011, 919-944.

N. Minami, Definition and selfadjointness of the stochastic Airy operator, arXiv:1401.0853.

N. Minami, Random Schroedinger operator with a constant electric field, Ann. Inst. Henri Poincare, vol.56, 1992, 307-344.

F. Klopp, Decorrelation estimates for the eigenlevels of the discrete Anderson model in the localized regime, Commun. Math. Phys., vol.303, 2011, 233-260.

B. Aditya Prakash et. al., Threshold conditions for arbitrary cascade models on arbitrary networks, Knowl. Inf. Syst., 2012, 549-575.

S. Kotani, On asymptotic behavior of the spectra of one-dimensional Hamiltonian with a certain random coefficient, Publ. RIMS, vol.12, 1976, 447-492.

N. Minami, Schroedinger operator with potential which is the derivative of a temporally homogeneous Levy process, Lect. Notes Math., vol.1299, 1988, 289-304.

M.H. Stone, Linear transformations in Hilbert spaces and their applications in analysis, Amer. Math. Soc., 1932

S. Kotani, N. Ushiroya, One - dimensional Schroedinger operators with random decaying potentials, Commun. Math. Phys., vol.115, 1988, 247-266.

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計 4 件)

南就将, On a class of generalized Sturm-Liouville operators, 数理解析研究所講究録, 査読無, 1970 巻, 2015 年, 96-101
南就将, 北川清宏, 鈴木瞭介, 数理解析研究所講究録, 査読無, 56 巻, 2014 年, 35-60

南就将, Consideration on Rubella Epidemic Based on Mathematical Modeling,

MI Lecture Note: Kyushu University, 査読無, 60 巻, 2014 年, 63-72

[学会発表](計 8 件)

南就将, 減衰因子のあるホワイトノイズをポテンシャルとする 1 次元シュレディンガー作用素について, 日本数学会 2018 年会, 2018 年

南就将, A stochastic model of generation time, Innovative Mathematical Modeling for the Analysis of Infectious Disease Data (IMAID 2017), 2017 年

南就将, On the Schroedinger operator with decaying white noise potential, Mathematical Physics Day in Hagen, 2016 年

南就将, One-dimensional Schroedinger operator whose potential is the white noise with decaying factor, 九州確率論セミナー, 2016 年

南就将, Possible consequences of rubella vaccination limited to school girls, Innovative Mathematical Modeling for the Analysis of Infectious Disease Data (IMAID 2015), 2015 年

南就将, エネルギー準位統計の諸問題と点過程論, 日本数学会 2015 年会, 2015 年

南就将, On a class of generalized Sturm-Liouville operators, Spectra of Random Operators and Related Topics, 2015 年

南就将, 数理モデルに基づく風疹流行の考察, 九州大学 IMI 共同利用研究・集会「感染症数理モデルの実用化と産業及び政策での活用のための新たな展開」, 2014 年

[図書](計 0 件)

[産業財産権]

出願状況(計 0 件)

名称:

発明者:

権利者:

種類:

番号:

出願年月日:

国内外の別:

取得状況(計 0 件)

名称:

発明者:

権利者:

種類:

番号:

取得年月日:

国内外の別:

〔その他〕

ホームページ等

<http://user.keio.ac.jp/~minami/>

6. 研究組織

(1) 研究代表者

南 就将 (MINAMI, Nariyuki)

慶應義塾大学・医学部・教授

研究者番号：10183964

(2) 研究分担者

()

研究者番号：

(3) 連携研究者

中野史彦 (NAKANO, Fumihiko)

学習院大学・理学部・教授

研究者番号：10291246

上木 直昌 (UEKI, Naomasa)

京都大学・人間・環境学研究科・教授

研究者番号：80211069

(4) 研究協力者

()