

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 29 年 6 月 22 日現在

機関番号：77103

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2014～2016

課題番号：26400155

研究課題名(和文) Shepp 空間の linear quasi-metric と数列表現

研究課題名(英文) Linear quasi-metric and sequence representation of Shepp space

研究代表者

岡崎 悦明 (Okazaki, Yoshiaki)

一般財団法人ファジィシステム研究所・研究部・特別研究員

研究者番号：40037297

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,200,000 円

研究成果の概要(和文)： L_p 関数 f の定める Shepp 数列空間の構造を研究した。 $p=2$ の場合に、Shepp 空間の内側および外側近似数列空間を導入し、これらが同一になる必要十分条件を f のフーリエ変換で定まる汎関数の doubling dimension が 2 より小さいこと、として与え、Shepp 空間の数列表現を得た。さらに r 階差分型の拡張された Shepp 空間の研究に進んでいる。

Shepp 空間の自然な一般化として「線形構造を持つ準距離空間」への新たな展開を試行した。本研究で、非加法的集合関数による L_p 関数空間から成る豊富なかつ興味深い例を構成し、新たな研究分野の開拓に着手している。

研究成果の概要(英文)：The Shepp space defined by an L_p function f is investigated. In the case of $p=2$, the inner and the outer approximation sequence spaces are introduced and the necessary and sufficient condition under which these two spaces are identical is given in terms of doubling condition of the functional of the Fourier transform of f . So that the sequence representation of the Shepp space is obtained. Further extensions to the Shepp space of order $r>1$ are studied. As a natural extension of the Shepp space, the quasi-metric space with the linear structure is considered. We found many new and interesting examples of linear quasi-metric spaces constructing the L_p like spaces with respect to the non-additive set function (fuzzy measure). The new development of the linear quasi-metric space is expected hereafter.

研究分野：実解析学，関数解析学，ファジィ測度論，確率論

キーワード：準距離 Shepp 空間 関数空間 L_p 空間 非加法的集合関数 数列空間 フーリエ変換 doubling condition

1. 研究開始当初の背景

(1) 本研究に至った背景について述べておきます。永年にわたって私たちは数列空間上の無限直積確率測度の「ずらしの同値性」の研究を続けて来ました。すなわち独立同分布確率変数列 $X=\{X_n\}$ を実数列 $a=\{a_k\}$ だけずらしたものを $X+a=\{X_n+a_k\}$ 、これらの確率変数列が数列空間上に導く無限直積確率測度をそれぞれ μ_X, μ_{X+a} とします。今互いに絶対連続となるずらしの全体を $\mathcal{A}=\{a \mid \mu_X \text{ と } \mu_{X+a} \text{ が同値(互いに絶対連続)}\}$ とします。S. Kakutani (Ann. Math. 49, 1948) は μ_X と μ_{X+a} が同値(互いに絶対連続)であるための必要十分条件を与え、L.A. Shepp (Ann. Math. Stat. 36, 1965) は、 μ_X を X_1 の分布の密度関数とすると、 μ_{X+a} が X_1 の分布の密度関数とすると、 $\int |f(x+a)-f(x)|^2 dx < +\infty$ となる必要十分条件が $\int |f(x)|^2 dx < +\infty$ となることを証明しました。

(2) Shepp の結果は、無限直積測度の絶対連続性の研究に大きな影響を与えました。然し、 $\int |f(x)|^2 dx = +\infty$ の場合は全く研究されておりませんでした。私たちの研究はこの場合にも光を当ててものです。私たちは Shepp の結果を正值確率変数のランダムなずらしについて拡張する過程で、この結果の本質を詳細に検討し、 μ_X を一般の μ に、 μ_{X+a} を一般の ν に拡張することにも成功し、一般の数列空間 $L_p(f)$ の発想に至りましたこのような背景を考慮し、数列空間 $L_p(f)$ を Shepp 空間と呼びます。

2. 研究の目的

(1) L_p 関数 $f(x)$ ($0 < p < \infty$) が定める Shepp 空間 $L_p(f)$ は Zygmund 空間をはじめ数々の興味ある数列空間を実現します。Shepp 空間 $L_p(f)$ は平行移動不変距離により位相加群となりますが、一般には線形空間ではなく、また数列空間としての具体的な構造も知られていません。そこで $L_p(f)$ が線形空間になるための条件、あるいは $L_p(f)$ の数列空間としての具体的な表現や距離の数列評価などが問題となります。本研究の目的は、 L_p 関数の定める Shepp 空間 $L_p(f)$ の線形構造および距離構造を解明し、合わせてその数列空間としての具体的な表現を実現することです。

(2) Shepp 空間から新しい関数空間「線形準距離空間」への発展。Shepp 空間はすべて linear quasi-metric space として統一して扱うことが出来、新しい関数空間論への発展も本研究の目的の一つです。

3. 研究の方法

(1) 私たちの研究は関数空間論と実解析学の方法に立脚しています。Shepp 空間の線形性を調べる新たな研究方法として、doubling dimension および linear quasi-metric の

新しい概念を導入し有効な研究方法として活用します。また Shepp 空間の数列表現を求めるために具体的で性質の分かる数列空間、「内側近似数列空間」および「外側近似数列空間」を導入するのは特筆すべき研究方法です。

(2) 線形構造を持つ準距離空間論を研究するために、準距離位相の性質(完備化、距離付けなど)に加え、実例の分析を行います。最近、非加法的集合関数による各種の積分に関する L_p 空間は線形構造を持つ準距離空間であることを見出しましたが、これらの関数空間をモデルにし、一般的性質を抽出します。

4. 研究成果

(1) L_p 関数 f の定める Shepp 空間 $L_p(f)$ の線形構造、位相構造及び数列構造を研究するため、まず $p=2$ の場合を精査しました。主要な成果は以下の通りです。

Shepp 空間固有の距離の数列評価を実現し、内側近似空間及び外側近似空間を導入し、Shepp 空間の諸性質の解明への枠組みを得た。一般の $p \geq 2$ の場合にも有用なアイデアであろう。

内側近似空間は Shepp 空間 $L_p(f)$ に含まれる最大の線形空間であるが、この空間に特有の準距離構造が入ることを見出し、Shepp 空間固有の距離との相互評価不等式を得ると共に、その数列構造を明らかにした。この準距離に関して内側近似空間は完備可分位相線形空間となることを証明した。

外側近似空間の線形性と関数 f のフーリエ変換で定まるある種の汎関数の増大度との関連を解明し、この汎関数が doubling condition を満たすことと外側近似空間に特有の準距離の性質との相互関連を明らかにした。更に、外側近似空間が線形であれば、この準距離に関して完備可分位相線形空間になることを証明した。

内側近似空間と外側近似空間が一致すれば、それらは Shepp 空間とも一致し、特に Shepp 空間は線形であり、その線形構造、位相構造及び数列構造もすべての空間の間で同型である。本研究で内側近似空間と外側近似空間が一致するための必要十分条件を、関数 f のフーリエ変換で定まるある種の汎関数(上述のものと同じ)の doubling dimension が 2 より真に小さいこと、の形で得ることが出来た。更にこの条件はある種の関数不等式でも定式化でき興味深い。今後一般の Shepp 空間の研究においても有用な道具となり得る。

(2) L_p 関数 f の定める Shepp 空間 $L_p(f)$ の線形構造、位相構造および数列構造の研究から発展し、従来の1階差分型 Shepp 空間 $L_p(f)$ を拡張し、任意の実数 $r > 0$ に対して、 r 階差分を用いた r 階 Shepp 空間 $L_{p,r}(f)$ の導入の可能性を検討しました。

その結果新たな研究テーマの発見に至りました。

まず非整数階差分作用素の L_p 有界性を証明し、この結果の一部は「 L_p の非整数階差分作用素」と言うテーマで取りまとめた。

Shepp 空間の準距離位相構造の研究から「線形構造を持つ準距離空間」の一般論の展開可能性が見えてきた。準距離空間の概念は従来はあまり研究がなされていなかった分野である、本研究でこれに取り組み、準距離空間の新たな性質についての結果、準距離空間の完備化、距離付定理、ペールの性質等を得た。

準距離を持つ関数空間の具体例として、劣加法的集合関数(劣加法的ファジィ測度)の作る L_p 空間を発見した。ファジィ測度に関する L_p 空間とその dual については従来全く研究されていない分野である。この空間は一般にはノルム空間にはならないが自然に準距離構造が定義できることを証明した。本研究では、Choquet 積分、菅野積分を初めとする各種の積分についてそれぞれ L_p とその dual space を導入しその性質を調べた。特に距離付定理を利用して、準距離の 2 分の 1 乗(これも再び同じ位相を定める準距離になる)に関する重要な不等式を証明した。非加法的集合関数に関する積分は多数提案されているが、それらの定める L_p 空間論は本研究で初めて導入された。これらの空間は「準距離空間」であり、通常の L_p とは異なる性質をもつ。

Shepp 空間の線形構造の研究からの発展として新たな $L_0(\mu)$ (= 測度 μ に関する可測関数の空間、ただし μ は無限測度とする)の位相線形部分空間 M を特定しその性質を調べた。これは $L_0(\mu)$ の最大の位相線形部分空間となるものである。空間 M は truncated L_0 space として解析的に表現できることを証明した。本研究を通して、準距離構造を持つ新たな関数空間論の研究に着手し、初期的ではあるが面白い結果が得られ始めている等、今後新たな研究分野への展開が期待できる。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

〔雑誌論文〕(計 4 件)

1. Aoi Honda and Yoshiaki Okazaki, Theory of inclusion-exclusion integral, Information Sciences, 査読有, Vol. 376, 2017, 136-147.
2. Yoshiaki Okazaki, Topological linear subspace of $L_0(\mu)$ for the infinite measure, Nihonkai Math. J., 査読有, Vol. 27, 2016, 147-154.
3. Aoi Honda and Yoshiaki Okazaki, Inclusion-exclusion integral and t-norm based data analysis model construction,

Communications in Computer and Information Science, 査読有, Vol. 610, 2016, 65-77, Springer.

DOI 10.1007/978-3-319-40596-4

4. Yoshiaki Okazaki and Aoi Honda, Approximations and the linearity of the Shepp space, Kyushu J. of Math., 査読有, Vol. 69 No.1, 2015, 173-194.

〔学会発表〕(計 13 件)

1. 本田あおい(発表者)・岡崎悦明, 包除積分の非離散化, 日本数学会年会実函数論分科会, 2017年03月26日(日), 「首都大学東京南大沢キャンパス(東京都八王子市)」.
2. 本田あおい・岡崎悦明(発表者), ファジィ測度の作る関数空間 $L_p(0 \leq p < \infty)$ の準距離線形構造, RIMS 共同研究集会 関数空間の構造とその周辺, 2017年02月6日-9日, 「京都大学数理解析研究所(京都府京都市)」.
3. 本田あおい・岡崎悦明(発表者), ファジィ測度の測度代数および可測関数空間 L_0 , 第21回曖昧な気持ちに挑むワークショップ, 2016年12月2日, 「大分コンパルホール(大分県大分市)」.
4. 本田あおい・岡崎悦明(発表者), ファジィ測度に対する concave および convex integrals とその L_p 空間の準距離線形構造, 実函数論シンポジウム 2016, 2016年10月21-23日, 「奈良女子大学(奈良県奈良市)」.
5. Aoi Honda and Yoshiaki Okazaki(発表者), L_p space and its dual for a fuzzy measure, 13th International Conference on Modeling Decisions for Artificial Intelligence, 2016年09月19-21日, 「Sant Julia de Loria(Amdorra)」.
6. 本田あおい・岡崎悦明(発表者), 劣加法的単調測度に対する Shilkret-菅野積分とその L_p 空間, 日本数学会秋季総合分科会実函数論分科会, 2016年9月17日, 「関西大学(大阪府吹田市)」.
7. 本田あおい(発表者)・岡崎悦明, t-ノルムに基づく包除積分データ解析モデルの構築, 日本数学会秋季総合分科会応用数学分科会, 2016年9月15日, 「関西大学(大阪府吹田市)」.
8. 本田あおい(発表者)・岡崎悦明, 非整数階 Shepp 数列空間と L_p の非整数階差分要素, 日本数学会年会実函数論分科会, 2016年3月18日, 「筑波大学(茨城県つくば市)」.
9. 本田あおい・岡崎悦明(発表者), 劣加法的単調測度の作る L_p 空間と双対 L_{p^+} , 日本数学会年会実函数論分科会, 2016年3月18日, 「筑波大学(茨城県つくば市)」.
10. 本田あおい・岡崎悦明(発表者), ファジィ測度の作る L_p 空間の準距離, 第20回曖昧な気持ちに挑むワークショップ, 2015年11月14日, 「明治大学中野キャンパス(東京都中野区)」.

11. 本田あおい・岡崎悦明(発表者), 準距離空間の完備化, 距離付けおよびベールの性質, 実解析学シンポジウム 2015, 2015年10月23日, 「東邦大学(千葉県船橋市)」.

12. 岡崎悦明(発表者), 関数空間 $M_p(\mu)$ の線形準距離構造, 日本数学会年会実函数論分科会, 2015年3月22日, 「明治大学駿河台キャンパスリバティータワー(東京都千代田区)」.

13. 岡崎悦明(発表者), Topological linear subspace of $L_0(\cdot, \mu)$ for the infinite measure space (\cdot, μ) , 「関数解析学の研究とその応用」研究集会, 2015年01月30日, 「新潟大学駅南キャンパス「ときめいと」(新潟県新潟市)」.

〔図書〕(計 件)

〔産業財産権〕

出願状況(計 件)

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
出願年月日：
国内外の別：

取得状況(計 件)

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
取得年月日：
国内外の別：

〔その他〕

ホームページ

http://macaron.ces.kyutech.ac.jp/okazaki/o_index.html

6. 研究組織

(1) 研究代表者

岡崎 悦明 (OKAZAKI Yoshiaki)
一般財団法人ファジィシステム研究所
研究部・特別研究員
研究者番号：40037297

(2) 研究分担者

本田 あおい (HONDA Aoi)
九州工業大学・大学院情報工学研究院
准教授
研究者番号：50271119

(3) 連携研究者

()

研究者番号：

(4) 研究協力者

佐藤 坦 (SATO Hiroshi)