

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 29 年 6 月 10 日現在

機関番号：14303

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2014～2016

課題番号：26400165

研究課題名(和文) 周期的シュレディンガー作用素に関連する散乱理論の研究

研究課題名(英文) Scattering theory for periodic Schroedinger Operators

研究代表者

峯 拓矢 (Mine, Takuya)

京都工芸繊維大学・基盤科学系・准教授

研究者番号：90378597

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,100,000円

研究成果の概要(和文)：(1)磁束の量子化条件を満たす2点 磁場に対するSchroedinger作用素の散乱振幅の公式を与え、それに対する数値計算結果を得た。特に高エネルギーの場合、結果が既存の伊藤-田村の漸近公式と良く一致することを確認した。さらに、得られた結果を積分することにより、スペクトル・シフト関数に対する明示的な公式を与えた。

(2)可解な周期的Schroedinger作用素であるKronig-Penneyモデルについて、各バンドに制限した時間発展作用素に関する分散型評価を与えた。tの-1/2乗で減衰する項に加えてtの-1/3乗で減衰する項が現れるが、後者の係数のバンド番号に関する評価を与えた。

研究成果の概要(英文)：(1) We give an explicit formula for the scattering amplitude for the Schroedinger operator with two-point delta-like magnetic fields satisfying the magnetic quantization condition, and give a numerical calculation for the amplitude. The obtained results are consistent with the asymptotic formula by Ito and Tamura. Moreover, we give an explicit formula for the spectral shift function for that model.

(2) We give a dispersive estimate for the Kronig-Penney model, which is an explicitly solvable model for the one-dimensional periodic quantum system. The estimate consists of two terms; one has the usual decay t to the power $-1/2$, and another has the slower decay t to the power $-1/3$. We also give a decay estimate for the coefficient of the latter term, with respect to the band number of the model.

研究分野：数物系科学

キーワード：数理物理学 量子力学 大域解析学 アハラノフ・ボーム効果 シュレディンガー方程式 分散型評価

1. 研究開始当初の背景

(1) Euclid 平面の 2 点に置かれた Aharonov-Bohm 型磁場(関数で表される磁場のこと、以下 AB 磁場と略す)に対する Schrödinger 作用素の散乱振幅に関する研究は、2001 年の伊藤-田村による高エネルギー漸近公式が有名であるが、1988 年に Gu-Qian は(やや厳密性に欠くが)楕円座標を用いた変数分離法によりこの散乱振幅を計算しており、その数学的検証・正当化が必要だった。

(2) d 次元ユークリッド空間において、十分速く遠方で減衰するポテンシャルに対する Schrödinger 方程式の発展作用素についての分散型評価は良く知られている。一方、周期的ポテンシャルを持つ Schrödinger 作用素の時間発展作用素に対する分散型評価はあまり知られていなかった。

2. 研究の目的

周期的ポテンシャルを持つ Schrödinger 作用素の解析、およびその散乱理論への応用についての研究を行う。特に、次の 2 つの題目について重点的に研究する。

(1) Mathieu 関数を用いた 2 点 AB 磁場に対する Schrödinger 作用素の散乱振幅の解析、および関連する諸作用素の散乱理論に関する研究。

(2) 周期的 Schrödinger 方程式の時間発展作用素に対する分散型評価に関する研究。

3. 研究の方法

(1) 磁束の量子化条件を満たす 2 点 AB 磁場に対する Schrödinger 作用素の一般固有関数は、その 2 点を焦点とする楕円座標、および対応する Mathieu 関数により具体的に書き下すことができる。特に動径方向の解について、通常のラプラシアンに関する動径方向の解との位相差を比較することで部分波散乱振幅が得られ、それを平面波の楕円波展開公式と組み合わせれば全体の散乱振幅を計算することが出来る。得られた公式について、数式処理ソフト Mathematica を用いて伊藤-田村の結果との比較を行い、さらに McLachlan の教科書にある諸公式を用いて低エネルギー極限における散乱振幅の漸近挙動を調べる。

(2) Floquet-Bloch 理論を用いれば周期的 Schrödinger 作用素の時間発展作用素をブロッホ波関数・バンド関数を用いて積分表示することができる。得られた積分核は Fourier 積分作用素の形で表されるため、位相関数であるバンド関数についての詳しい解析を行い、停留位相の方法を用いて積分核の評価を行っていく。

4. 研究成果

(1) 磁束の量子化条件を満たす 2 点 AB 磁場に対する Schrödinger 作用素の散乱振幅の公式が得られ、それに対する数値計算結果を得

た。特に高エネルギーの場合、結果は伊藤-田村の漸近公式と良く一致していた。さらに、得られた結果を積分することにより、スペクトル・シフト関数に対する明示的な公式を与えた。これについても、数値計算結果は高エネルギーの場合には 2008 年の田村の結果と良く一致していた。さらに、低エネルギーの場合には Mathieu 関数の二重 Bessel 展開の初項をとることで、スペクトル・シフト関数の漸近挙動が得られた。

(2) 実数直線上の可解な周期的シュレディンガー作用素である Kronig-Penney モデルのバンド関数を解析し、各バンドに制限した時間発展作用素に関する分散型評価を得た。評価は通常の一次元ユークリッド空間と同じ t の $-1/2$ 乗の項と、それより遅い減衰である t の $-1/3$ の項からなり、後者の項については評価式の係数がバンド番号 n の $-1/9$ 乗の形で減衰することを示した。

(3) 関連する結果として、磁場を持つ Schrödinger 作用素に対する Rellich 型不等式の研究を行った。Balinsky-Evans-Lewis の教科書では平面内に AB 磁場が 1 つだけの場合を扱っているが、それを一般化し、磁場が動径方向のみに依存する場合の Rellich 型不等式を研究した。時に、磁場+半径 1 の円周上の磁場の場合には、Rellich 型不等式が成り立つための必要十分条件を与えた。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計 4 件)

1.

著者: Takuya Mine and Yuji Nomura
題目: Schrödinger Operators with Random Magnetic Fields
雑誌名: Annales Henri Poincaré 18 no. 4
発行年: 2017
頁数: 1349-1369
査読: 有り

2.

著者: 峯 拓矢, 野村祐司
題目: Integrated density of states for the Schrödinger operators with random magnetic fields
雑誌名: 数理解析研究所講究録 1970 ランダム作用素のスペクトルと関連する話題 Spectra of Random Operators and Related Topics
発行年: 2015
頁数: 72-82
査読: 無し

3.

著者: 峯 拓矢
題目: Solvable models in the spheroidal coordinates

雑誌名：数理解析研究所講究録 1961 量子場の数理とその周辺 (Mathematical Aspects of Quantum Fields and Related Topics)
発行年：2015
頁数：56-73
査読：無し

4.
著者：Takuya Mine
題目：Solvable models in two-solenoidal Aharonov-Bohm magnetic fields on the Euclidean plane
雑誌名：Spectral and Scattering theory and Related Topics(ed. F. Hiroshima), 数理解析研究所講究録別冊 B45
発行年：2014
査読：有り

〔学会発表〕(計 12 件)

1.
発表者名：Takuya Mine
題目：Spectral Shift Function for the magnetic Schrödinger operators
研究会名：QMath13: Mathematical Results in Quantum Physics
発表場所：Georgia Institute of Technology (Atlanta, Georgia, U.S.)
発表年月日：2016年10月8日

2.
発表者名：峯 拓矢
題目：磁場付き Schrödinger 作用素に対する Rellich の不等式について
研究会名：夏の作用素論シンポジウム
発表場所：米子コンベンションセンター-BIG SHiP (鳥取県米子市)
発表年月日：2016年9月5日

3.
発表者名：Takuya Mine
題目：Trace formula for the Aharonov-Bohm magnetic fields
研究会名：ランダム作用素のスペクトルと関連する話題
発表場所：慶應義塾大学 日吉キャンパス(神奈川県横浜市)
発表年月日：2015年12月11日

4.
発表者名：Takuya Mine
題目：Time decay for the Kronig-Penney model
研究会名：The 13th Linear and Nonlinear Waves
発表場所：ピアザ淡海(滋賀県大津市)
発表年月日：2015年11月4日

5.
発表者名：Takuya Mine

題目：Computation of the scattering amplitude in the spheroidal coordinates
研究会名：統合量子素子研究室 セミナー (Lab Seminar)
発表場所：高知工科大学(高知県香美市),
発表年月日：2015年10月12日

6.
発表者名：峯 拓矢
題目：一般超幾何函数の漸近公式について
研究会名：夏の作用素論シンポジウム
発表場所：フェニックス・プラザ(福井県福井市)
発表年月日：2015年9月7日

7.
発表者名：Takuya Mine
題目：Spectral shift function for the magnetic Schrödinger operators
研究会名：偏微分方程式姫路研究集会
発表場所：イーグレ姫路(兵庫県姫路市)
発表年月日：2015年3月6日

8.
発表者名：Takuya Mine
題目：楕円体座標を用いた散乱振幅の計算
研究会名：松山解析セミナー
発表場所：愛媛大学理学部(愛媛県松山市)
発表年月日：2015年2月6日

9.
発表者名：Takuya Mine
題目：On the Schrödinger operators with random magnetic fields
研究会名：ランダム作用素のスペクトルと関連する話題
発表場所：京都大学数理解析研究所(京都府京都市)
発表年月日：2015年1月8日

10.
発表者名：Takuya Mine
題目：Solvable models in the spheroidal coordinates
研究会名：実領域における常微分方程式の定性的理論とその応用
発表場所：京都大学数理解析研究所(京都府京都市)
発表年月日：2014年11月5日

11.
発表者名：Takuya Mine
題目：Solvable models in the spheroidal coordinates
研究会名：量子場の数理とその周辺
発表場所：京都大学数理解析研究所(京都府京都市)
発表年月日：2014年10月7日

12.

発表者名：峯 拓矢

題目：Aharonov-Bohm 磁場に対する Rellich
の不等式について

研究会名：夏の作用素論シンポジウム

発表場所：セミナー・カルチャーセンター臨
湖（滋賀県長浜市）

発表年月日：2014 年 9 月 8 日

〔図書〕(計 0 件)

〔産業財産権〕

出願状況(計 0 件)

取得状況(計 0 件)

〔その他〕

ホームページ等

京都工芸繊維大学研究者総覧

<https://www.hyokadb.jim.kit.ac.jp/top/ja.html>

6. 研究組織

(1)研究代表者

峯 拓矢 (MINE, Takuya)

京都工芸繊維大学・基盤科学系・准教授

研究者番号： 90378597

(2)研究分担者

なし

(3)連携研究者

なし

(4)研究協力者

野村 祐司 (NOMURA, Yuji)

神永 正博 (KAMINAGA, Masahiro)