様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９－１、Ｚ－１９　（共通）

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 ３０ 年　 ６ 月　 ４ 日現在

機関番号：１４４０１
研究種目：基盤研究(C)（一般）
研究期間：2014～2017
課題番号：２６４００１６８

研究課題名（和文）非線形波動に関連した偏微分方程式の解の存在と漸近挙動

研究課題名（英文）Global existence and the asymptotic behavior for partial diffierential equations concerning nonlinear waves

研究代表者
片山　聡一郎（Katayama, Soichiro）

大阪大学・理学研究科・教授

研究者番号：７０２８３９４２

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　2,900,000円

研究成果の概要（和文）：非線形波動方程式系，あるいは関連する方程式系の初期値問題の大域解(任意の時刻までの解)が存在するための十分条件に関する研究を行った(初期値は小さいものとする)．古典的によく知られた零条件よりも弱い十分条件("弱"零条件)に関しては，既知の2つの"弱"零条件を統合した条件の下で大域解が存在することを示し，大域解の漸近的な振る舞いを与える公式を得た．また，Alinhac による2次元空間における大域解の存在定理の改良を行った．波動とクライン=ゴルドン方程式の非線形連立系に関しても，以前よりも弱い条件の下で，初期値が遠方で0ならば大域解をもつことを示した．

研究成果の概要（英文）：We studied sufficient conditions for the existence of global solutions (solutions up to the arbitrary time) to the Cauchy problem for systems of nonlinear wave equations, or for some related systems, with small initial data. Concerning sufficient conditions weaker than the well-known null condition (such weaker conditions are called the "weak" null conditions), we unified the two known "weak" null conditions, and proved the global existence under this unified condition. Some formula to give the asymptotic behavior for global solutiuons was obtained. We also improved the global existence theorem by Alinhac for wave equations in two space dimensions. Concerning the systems of nolinear wave and Klein-Gordon equations, we proved the global existence of solutions under a weaker condition than before, in the case that initial data vanish outside a bounded region.

研究分野：非線形偏微分方程式

キーワード：非線形波動方程式　大域解　零条件　弱零条件　漸近挙動

１．研究開始当初の背景

非線形偏微分方程式の初期値問題を考えるとき，初期値が十分滑らかで，遠方で十分に速く減衰している場合には，初期時刻より始めて，少なくともある有限の時刻までは解(局所解)が存在することが古典的によく知られている．他方，任意の時刻までの解は必ずしも存在せず，非線形項の形，あるいは初期値の大きさ・形状等に応じて，有限時刻までしか解が存在しない場合があることもよく知られている(解の爆発)．したがって，初期値問題が任意の時刻までの解(大域解)をもつための条件を明らかにすることは非線形偏微分方程式論の基礎理論において重要な問題である．また大域解が存在した場合，時刻が大きくなったとき，その解が大まかにはどのように振舞うか(解の漸近挙動)を調べることも重要な問題である．

非線形波動方程式の大域解の存在についての十分条件の中で最も有名なものは，3 次元空間における連立波動方程式系に対する零条件 (null condition) である．これは 1986 年に Klainerman により導入された(引用文献③)．零条件下では，大域解は時間が経つと，非線形項を持たない方程式系の解(自由解)に近づいていくことも知られている．その後，別の空間次元(例えばAlinhacの引用文献①)や，別の方程式系に対して同種の十分条件が活発に研究されたが，Klainermam の扱った方程式系に関してはおよそ 20 年間にわたり零条件が最も広いクラスの非線形項を扱える十分条件であった．しかし 2006 年にAlinhacにより零条件よりも弱い十分条件(つまり，より広い非線形項を扱える十分条件)が提示された(引用文献②)．本研究の代表者は Alinhac の結果に触発され，Alinhac の条件下での大域解の漸近挙動の研究や，Alinhac とは別種の，零条件よりも弱い十分条件の研究を行った(引用文献⑤，⑥など)．以上が，本研究開始当初の状況である．

２．研究の目的

非線形波動方程式や非線形クライン=ゴルドン方程式等に対する初期値問題を考える．初期値は小さいものに制限する代わりに，可能な限り一般的な非線形項を扱う．研究代表者による以前の研究を継続・発展させ，小さな初期値に対して大域解が存在するための，より弱い(したがって，より広いクラスの非線形項が扱える)十分条件を探求することが目的である．また，得られた十分条件の下での大域解の時刻無限大での起こりうる漸近的な挙動を明らかにし，挙動を分類することも目的とする．

３．研究の方法

Klainerman により導入され，様々な研究者により改良されてきた，いわゆるベクトル場の方法を主たる道具として用いる．大域解の存在やその漸近挙動を探る指標としては，Hörmander や Alinhac が用いた簡約化方程式(系)を用いる．ここで，簡約化方程式(系)とは，元の問題の解の主要部が従うと考えられる形式的に導出された(元の方程式系よりも一般に簡単な形の)方程式(系)である．本研究ではこの簡約方程式系を単なる指標としてのみならず，具体的な証明の道具としても用いる点が特徴である．

４．研究成果

本研究では非線形波動方程式の連立系に対する初期値問題を中心に扱った．関連して非線形消散項をもつ単独の波動方程式，および非線形波動方程式と非線形クライン=ゴルドン方程式の双方を含む連立系についての研究も行った．得られた研究成果は以下の通りである．なお，特に断らない限りは，初期値は十分小さいと以下では仮定する．

(1) 非線形波動方程式の連立系に関する研究成果：小さな解を扱う限り，空間の次元が高いほど解の減衰率が大きくなるため，大域解が存在しやすくなる．また非線形項の次数が高いほど，非線形項の大きさが小さくなるために大域解が存在しやすくなる．実際，特に非線形項が未知関数の導関数のみに依存する場合には，空間次元が 4 次元以上のとき，特に付加条件を課さなくても小さな初期値に対して大域解が存在する．よって空間次元が 3 以下の場合に興味がある．大域解の存在・非存在を分ける非線形項の次数(以下，臨界次数と呼ぶ)は 3 次元の場合は 2 次，2 次元の場合は 3 次である．臨界次数(あるいはそれ以下の次数)の非線形項の場合には，非線形項の次数以上の詳しい構造が大域解の存在・非存在に影響する．

① 2 次元空間での非線形波動方程式系に関して，3 次以上の非線形項を持つ場合には，Klainerman の零条件に相当する十分条件の研究が 90 年代に盛んに行われていた．多くの結果は非線形項が未知関数の導関数のみに依存する場合を扱っていたが，研究代表者は非線形項が未知関数の導関数のみならず，未知関数自身にも依存する場合に対しても結果を得ていた．波動方程式の場合，基礎的な不等式であるエネルギー不等式が解の導関数の評価しか直接には与えないため，未知関数自身とその導関数の双方に依存する場合は特に扱いが困難であることに注意しておく．

連立系の場合，2 次の非線形項はたとえ零条件を満たしていても 2 次元空間においては扱いが非常に困難であり，90 年代にはほとんど扱われていなかった．2000 年代になって ghost weight energy 法と呼ばれる手法が Alinhac により導入され，2 次と 3 次の非線形項が零条件を満たしていれば，大域解が存在することが示された(引用文献①)．た

だし Alinhac は非線形項が未知関数の導関数のみに依存している場合を扱っていた．

今回，ghost weight energy を未知関数自身の評価にも用いる手法を開発することにより，Alinhac が得た結果を非線形項が未知関数自身にも依存する場合に拡張することに成功した．これはAlinhacの結果の拡張であると同時に，研究代表者が３次以上の非線形項を持つ場合に得ていた結果の拡張にもなっている．また，非線形項が未知関数自身とその導関数の双方に依存する場合，初期値の台がコンパクトという仮定(つまり初期値が有界領域の外では値が０であるという仮定)を以前の研究では置いていたが，今回開発した手法によってこの仮定は不要であることが明らかになったことも特筆すべき点である．

この研究成果は後述の図書①の第９章として出版されている．

② 本項目では非線形項が未知関数の 1 階導関数のみに依存する場合に考察を制限する．また，ちょうど臨界次数の非線形項をもつ場合，すなわち３次元空間の場合は２次の非線形項，２次元空間の場合には３次の非線形項をもつ場合に考察を限定する．

最初に述べたように，上記のような非線形波動方程式系に対する大域解の存在を一般的に保証する十分条件としては零条件がよく知られていたが，簡単な例を考察することにより，少なくとも連立系に対しては，零条件は必要条件ではないことも知られていた．したがって，零条件よりも弱い十分条件を見出すことは興味深い問題である．以下では，大域解存在の十分条件で零条件よりも弱いものを“弱”零条件と総称することにする．“弱”零条件の研究は 2000 年代後半より始まったが，一般的な条件として最初に導入されたものは Alinhac によるものである(引用文献②; 以下，Alinhac型の条件と呼ぶ)．その後，研究代表者は的場氏や砂川氏らとの一連の共同研究(引用文献⑥等)において，別種の“弱”零条件を導入した(以下では共同研究者の頭文字をとってKMS型と呼ぶ)．

本研究では，Alinhac型とKMS型の条件を統合した“弱”零条件を３次元空間と２次元空間で得ることに成功した．さらに３次元の場合には同じ条件の下で，大域解の漸近挙動が簡約方程式系の解を用いて記述できることを示した(この結果は以前の引用文献⑤，⑥の結果の拡張である)．２次元空間の場合には，残念ながら少し条件を強める必要があるが，同様の漸近挙動に関する結果を得た．これにより，“弱”零条件の下では大域解の漸近挙動には様々な種類があることが明らかになった．以上の研究成果は後述の図書①の第10章として出版された(なお，図書①の第１章～第８章および第９章の前半と第11章では非線形波動方程式の既知の結果が解説されている)．

③ 上述の②で得た漸近挙動に関する基礎定理を応用し，KMS型の“弱”零条件の下での大域解の漸近挙動を特別な形の２成分系に限定してより詳しく分類した．簡約化された非線形項の単位円上での零点の個数に応じて，解が自由解には漸近しない場合，自由解には漸近するが，その自由解の形状に強い制約がつく場合が起こり得ることを明らかにした．この結果は後述の雑誌論文②として出版が決定している．

(2) 非線形消散項をもつ波動方程式に関する研究成果: 1 次元空間の場合，線形波動方程式の解には時間減衰がないため，たとえ初期値が小さくて非線形項の次数が高くても，非線形方程式に対する大域解の存在は一般には期待できないが，非線形方程式の解に対して(十分な数の)保存則が成立するような場合には大域解が存在する．非線形消散項を持つ場合はそのようなケースの１つであり，(初期値が小さくなくても)大域解が存在することが古典的に知られている．

状況を説明するために設定を少し一般化しておく．pを１より大きい実数とするとき，p 次の非線形消散項をもつ波動方程式を一般の次元で考えることができ，大域解が存在することも知られている．次元に応じて p がある程度小さいときには，非線形消散項は実際に消散効果を持ち，解のエネルギーが時間とともに０に減衰する．他方，p が大きいときには，小さな初期値に対しては非線形消散項は(名前には反して)消散効果を持たず，エネルギーが減衰しない．エネルギー減衰と非減衰を分ける臨界次数は現時点では知られておらず，ある範囲の次数に対してはエネルギーが減衰するかしないかは不明である．例えば 2 次元空間の場合は，3 次の非線形消散項はエネルギー減衰を持つか持たないか長らく不明であったが，実はこの場合にはKMS型の“弱”零条件が満たされている．このことに着目して，研究代表者らは，(1)の②で述べたような大域解の漸近挙動を記述する定理を援用することにより，２次元で３次の非線形消散項は(少なくとも小さな初期値を持つ場合には)実際に消散効果を持ち，エネルギーが減衰することを以前の研究で示した．さらに各点的な減衰も，消散項がない場合に比べてわずかに早くなることも示した．

以上を踏まえて，本研究では１次元空間における非線形消散項の消散効果についての考察を行った．前項の簡約化方程式を用いる方法を援用・修正することにより，p が 2 よりも大きければ，解の各点的な減衰が得られること，また p が 2 と 5 の間にあるときにはエネルギーの減衰が見られることを明らかにした．本研究より前には解の各点的な減衰は全く知られておらず，エネルギ

ーの減衰も 3よりpが小さいときにしか知られていなかったことに注意しておく．研究代表者はpが5以上のときにもエネルギー減衰が見られると予想しているが現時点では全く不明である．以上の結果は室蘭工科大学(共同研究当時)の若狭恭平氏と北海道大学の B.Yordanov 氏との共同研究である．論文は現在，投稿準備中である．

(3) 非線形波動方程式と非線形クライン=ゴルドン方程式の連立系に関する研究成果：クライン=ゴルドン方程式は波動方程式に質量項と呼ばれる項を付加したものである(逆に言えば質量が 0 の場合のクライン=ゴルドン方程式が波動方程式である)．

違いは質量項の有無だけであるが，解の挙動は大きく異なる．例えばクライン=ゴルドン方程式に対するエネルギー不等式は未知関数の導関数のみならず未知関数自身の評価も与える．またクライン=ゴルドン方程式の解の一様減衰率は，ちょうど1次元高い波動方程式の解の減衰率と同じである(ただし波動の場合は光錐から離れると減衰が速くなるという性質があるが，クライン=ゴルドンにはそのような性質はなく，光錐から離れたところでは波動の解の減衰のほうが速い)．

以下，3 次元空間に話を限定する．波動の場合は大域解を得るために例えば零条件が必要であった．一方，上記の速い減衰を反映してクライン=ゴルドン方程式の場合には 2 次以上の非線形項であれば，特に制約を課さなくても大域解が存在する(初期値の小ささは仮定する)．波動とクライン=ゴルドンの双方を含む方程式系で記述される物理モデルも多く存在するため，そのような連立系に対して大域解の存在条件を考察することは興味深い問題である．波動，クライン=ゴルドンともにベクトル場の方法を用いて解析できるが，双方で許されるベクトル場が異なるためにこのような連立系の解析は困難であり，90年代には Georgiev によるかなり強い条件(強零条件)の下での大域解の存在しか知られていなかった．2012年に研究代表者は Georgiev の結果を大幅に改良し，波動のみからなる場合には零条件と一致し，クライン=ゴルドンのみからなる場合には制約なしとなるような自然な条件の下で大域解の存在を示すことに成功した(引用文献④)．得られた大域解はエネルギーの意味で自由解に漸近するものの，波動方程式に従う成分(以下，波動成分)の解の減衰率は線形波動の場合に比べて悪いものしか得られなかった．以上を踏まえて以下のような研究を行った．

① 波動成分およびその導関数の減衰率の評価を悪くする原因は，波動成分が従う方程式の非線形項に含まれるクライン=ゴルドン成分同士の相互作用である．この部分に対する新たな「零条件」を導入し，この条件を付け加えれば波動成分とその導関数の減衰率がかなり改善されることを示した．この結果は後述の雑誌論文①として掲載が決定されている．

② 初期値が有界領域の外では 0 になる場合に制限すれば，①で述べたような零条件を置かなくても，(上記①ほどではないが)波動成分自身の減衰率が改善されることを示した(上と異なり導関数の評価は改善されない)．それどころか，この減衰率の改善を利用することにより，上記のような初期値の場合には，以前よりも弱い条件下で大域解の存在を示せることも分かった．この結果は後述の雑誌論文③として出版されている．

〈引用文献〉

① S. Alinhac, The null condition for quasilinear wave equations in two space dimensions I, Inventiones Mathematicae **145** (2001), pp.597－618.

② S. Alinhac, Semilinear hyperbolic systems with blowup at infinity, Indiana University Mathematics Journal **55** (2006), pp.1209-1232.

③ S. Klainerman, The null condition and global existence to nonlinear wave equations, Lectures in Applied Mathematics **23** (1986), pp.293－326.

④ S. Katayama, Global existence for coupled systems of nonlinear wave and Klein-Gordon equations in three space dimensions, Mathematische Zeitschrift **270** (2012), pp.487-513.

⑤ S. Katayama, Asymptotic pointwise behavior for systems of semilinear wave equations in three space dimensions, Journal of Hyperbolic Differential Equations **9** (2012), pp.263-323.

⑥ S. Katayama, T. Matoba and H. Sunagawa, Semilinear hyperbolic systems violating the null condition, Mathematische Annalen **31** (2015), pp.275-312.

５．主な発表論文等

（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計３件）

① <u>Soichiro Katayama</u>, Global existence for a class of system of nonlinear wave and Klein-Gordon equations, RIMS Kokyuroku Bessatsu (数理解析研究所講究録別冊), 印刷中, 査読有.

② <u>Soichiro Katayama</u>, Remarks on the asymptotic behavior of global solutions to systems of semilinear wave equations, Advanced Studies in Pure Mathematics, 印刷中， 査読有.

③ Soichiro Katayama, Global existence for systems of nonlinear wave and Klein-Gordon equations with compactly supported initial data, Communications on Pure and Applied Analysis **17** (2018), pp. 1479-1497, 査読有. DOI: 10.3934/cpaa.2018071

〔学会発表〕（計 11 件）

① 片山 聡一郎, Decay of solutions to nonlinear dissipative wave equations in one space dimension, 広島微分方程式研究会(於:広島大学)(招待講演), 2017 年.

② 片山 聡一郎, Global existence for a class of system of nonlinear wave and Klein-Gordon equations, 第 13 回非線型の諸問題(於:鹿児島市町村自治会館)(招待講演), 2017 年.

③ Soichiro Katayama, Global existence for a class of system of nonlinear wave and Klein-Gordon equations in 3D, 調和解析と非線形偏微分方程式(於:京都大学数理解析研究所)(招待講演)(国際学会), 2017 年.

④ Soichiro Katayama, Global existence and the asymptotic behavior for systems of semilinear wave equations, Workshop on Nonlinear Wave Equations, Fudan University(於: 復旦大学[中国])(招待講演)(国際学会), 2017 年.

⑤ 片山 聡一郎, 非線形波動方程式系の大域解の存在と漸近挙動, 日本数学会 2017 年度年会(函数方程式論分科会特別講演, 日本数学会解析学賞受賞講演)(於: 首都大学東京)(招待講演), 2017 年.

⑥ Soichiro Katayama, Global existence for systems of nonlinear wave and Klein-Gordon equations with compactly supported data, Zhejiang-Tohoku International Workshop "Nonlinear Partial Differential Equations 2017"(於:東北大学)(招待講演)(国際学会), 2017 年.

⑦ Soichiro Katayama, Decay of solutions of wave equations with nonlinear dissipative terms, 研究集会「Critical Exponents and Nonlinear Evolution Equation」(於:東京理科大学)(招待講演)(国際学会), 2017 年.

⑧ Soichiro Katayama, Asymptotic behavior of solutions for systems of semilinear wave equations, The 23rd Machikaneyama Seminar on PDEs(於:大阪大学理学部)(招待講演)(国際学会), 2016 年.

⑨ 片山 聡一郎, Asymptotic behavior of solutions for systems of semilinear wave equations, 第 33 回九州における偏微分方程式研究集会(於: 九州大学 西新プラザ)(招待講演)(国際学会), 2016 年.

⑩ Soichiro Katayama, Asymptotic behavior for systems of semilinear wave equations violating the null condition, Workshop on Partial Differential Equations and Numerical Analysis(於: 延辺大学[中国])(招待講演)(国際学会), 2015 年.

⑪ Soichiro Katayama, Asymptotic behavior for small solutions to systems of semilinear wave equations, International Conference: Asymptotic Analysis for Nonlinear Dispersive and Wave Equations(於:大阪大学)(招待講演)(国際学会), 2014 年.

〔図書〕（計 1 件）

① Soichiro Katayama, Mathematical Society of Japan (日本数学会), Global Solutions and the Asymptotic Behavior for Nonlinear Wave Equations with Small Initial Data (MSJ Memoirs Volume 36), 2017, 298 ページ.
https://projecteuclid.org/euclid.msjm/1511805567

６．研究組織

(1)研究代表者

片山 聡一郎 (KATAYAMA, Soichiro)
大阪大学・大学院理学研究科・教授
研究者番号： ７０２８３９４２

(2)研究分担者

(　　　)

研究者番号：

(3)連携研究者

(　　　)

研究者番号：

(4)研究協力者

(　　　)