

令和元年6月10日現在

機関番号：35302

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2014～2018

課題番号：26400182

研究課題名(和文) 2点境界値問題の解の個数と振動解の長さフラクタル次元

研究課題名(英文) The number of solutions and the length and the fractal dimension of oscillatory solutions of two point boundary problems

研究代表者

田中 敏 (Tanaka, Satoshi)

岡山理科大学・理学部・教授

研究者番号：90331959

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,700,000円

研究成果の概要(和文)：2点境界値問題について、解の個数と振動解の長さフラクタル次元に関する研究を行い、主に以下のような成果をあげた。符号変化する重み関数と一次元の p -ラプラス作用素をもつ2点境界値問題の3個の正値解の存在のための十分条件を得た。一次元 (p, q) -ラプラス作用素をもつ自励系の2点境界値問題の解の個数に関する結果を得た。一次元リウヴィル型方程式と一次元 Henon 方程式の正値解の対称性の破れの分岐現象を発見することができた。2次元線形非自励系と2次元半分線形非自励系の振動解の解曲線の無限長性とそのボックス次元に関する結果を得た。

研究成果の学術的意義や社会的意義

本研究のテーマである2点境界値問題は、それ自身が微分方程式論のなかで重要な問題であるが、偏微分方程式の研究でもしばしばあらわれるもので、その解の個数を知ることは基礎的かつ重要な問題である。2点境界問題の解の存在・非存在に関してこれまで膨大な量の結果が得られている一方で、その解の厳密な個数を調べることは、問題が単純な形であっても非常に困難を伴うことが多い。また、振動解のグラフの有限長性とフラクタル次元についての研究は、つい最近始まった独創的な研究である。本研究により、以上のような問題の一部が解決された。

研究成果の概要(英文)：The number of solutions and the length and the fractal dimension of oscillatory solutions of two point boundary problems are studied, and then the following results were established. Sufficient conditions for the existence of three positive solutions to two point boundary problem with a sign-changing weight function and the one-dimensional p -Laplacian were obtained. Results on the number of solutions to the autonomous two point boundary problem with (p, q) -Laplacian were obtained. The symmetry-breaking bifurcations for the one-dimensional Liouville type equation and the one-dimensional Henon equation were found. Results on the non-rectifiability and the box-counting dimension of solution curves of two-dimensional non-autonomous linear and half-linear differential systems were obtained.

研究分野：微分方程式論

キーワード：2点境界問題 正値解 符号変化する解 分岐 解曲線の長さ フラクタル次元 ボックス次元

様式 C - 19、F - 19 - 1、Z - 19、CK - 19 (共通)

1. 研究開始当初の背景

2点境界値問題の研究の歴史は長く、これまで膨大な量の結果が得られている。そのほとんどの結果において、解の個数は問題に随伴するある方程式の根の個数と一致している。そうでない結果は、正値解に関してはいくつかの結果が得られている一方で、符号変化する解に関しては、ほとんどなにも得られていない。また、正値解の厳密な個数、例えば、一意性やちょうど2個の正値解をもつといった結果はこれまである程度得られているが、それに比べると符号変化する解の厳密な個数についての結果は非常に少ない。また、2点境界値問題は楕円型偏微分方程式の境界値問題の1次元の場合であるし、楕円型方程式の境界値問題の球対称解は2点境界値問題に帰着される。2点境界値問題は、それ自身が微分方程式論のなかで重要な問題であるが、偏微分方程式の研究でもしばしばあらわれるもので、その解の個数を知ることは基礎的かつ重要な問題である。2点境界問題の解の存在・非存在に関してこれまで膨大な量の結果が得られている一方で、その解の厳密な個数を調べることは、問題が単純な形であっても非常に困難を伴うことが多い。

常微分方程式の解の振動性に関する研究の歴史も長く、1863年の Sturm の比較定理から始まり、1940年代からは2階線形方程式の解の振動性について多くの研究が発表された。その後、様々な方程式の解の振動性が研究され、現在に至っている。しかし、振動解のグラフの有限長性・無限長性及びフラクタル次元についての研究は、最近始まった新しい研究である。

2. 研究の目的

本研究の目的は、2点境界値問題の高々有限個の零点をもつ解（非振動解）の厳密な個数の調査、及び無限個の零点をもつ解（振動解）の曲線の長さが有限長か無限長どうかを判定し、さらに、それが無限長の場合は、そのフラクタル次元を調べることである。

3. 研究の方法

非振動解の厳密な個数についての研究は shooting method を利用した Kolodner-Coffman の方法に基づいて行った。それは、2点の境界条件のうち1点の境界条件を満たすようなパラメータを含む初期値問題を考え、その解とパラメータの関係を精密に調べることで、非振動解の厳密な個数が判明するという方法である。その際、初期値問題の解をパラメータで偏微分したものが、線形化問題の解になる。ある適切な比較関数を見つけることで、線形化問題の解の挙動を調べることができる。本研究過程で新たな比較関数を発見することができた。それにより、いくつかの2点境界値問題の解の厳密な個数を決定することができた。

ポテンシャルが対称な問題においては、対称な解がよく存在する。本研究では、一次元リウヴィル型方程式、一次元 Henon 方程式、及び Moore-Nehari 方程式の正値対称解のモース指数を求めた。このことも、線形化問題を適切な比較関数により解析することで可能となる。2点境界値問題を同値な積分方程式に帰着させると、そこに現れる写像のルレイ・シャウダーの写像度が、モース指数より直ちに求まり、写像度の理論を応用して、正値対称解から正値非対称解が分岐することを発見することができた。

問題に対応するエネルギー関数を精密に評価することにより、振動解の導関数を評価することができた。この方法により、通常よく仮定されている Hartman-Wintner 条件を仮定することなく、振動解の無限長性を示すことが可能となった。

渦巻状の曲線のボックス次元を求める方法を新たに確立した。これを利用することに加えて、2次元系の振動解の漸近挙動を調べることにより、その有限長性・無限長性及びボックス次元を求めることができた。

4. 研究成果

2点境界値問題について非振動解の個数と振動解の長さとのフラクタル次元に関する研究を行い、主に以下のような成果をあげた。

符号変化する重み関数と一次元の p -ラプラス作用素をもつ2点境界値問題が3個の正値解をもつような場合があるのかは、これまで不明であったが、本研究にて、そのようなことが起こることが確認された。スカラー場方程式の正値球対称解の一意性については解決済みであったが、その符号変化する球対称解の一意性については、ほとんど何もわかっていなかった。本研究では、部分的にだが、その一意性の結果を新たに得ることができた。2次元線形非自励系と2次元半分線形非自励系の解の漸近挙動に関する結果、及び振動解の解曲線の無限長性とそのボックス次元に関する結果を得た。2階線形常微分方程式と Emden-Fowler 方程式の振動解の無限長性とそのボックス次元に関する結果を得た。2階線形方程式常微分方程式の振動解の無限長性についての多くの結果があるが、Hartman-Wintner 条件とよばれるものを仮定した結果ばかりであった。一方、本研究では、それを必要としない結果を得ることができた。一次元 (p, q) -ラプラス作用素をもつ自励系の2点境界値問題の正値解についての分岐図を得ることができた。 p と q が等しい場合、 (p, q) -ラプラス作用素は通常の p -ラプラス作用素であるが、ここでは、 p と q が異なる場合に、 p -ラプラス作用素をもつ問題とは、まったく異なる解の分岐図が現れることを発見することができた。一次元リウヴィル型方程式、一次元 Henon 方程式及び Moore-Nehari 方程式の対称な正値解のモース指数を求めることができた。それにより、それらの方程式の正値解の対称性の破れの分岐現象を発見することができた。

5 . 主な発表論文等

[雑誌論文](計 14 件)

以下はすべて査読有である。

I. Sim and S. Tanaka, Symmetry-breaking bifurcation for the one-dimensional Henon equation, *Commun. Contemp. Math.* 21 (2019), no. 1, 1750097, 24 pp.

DOI: 10.1142/S0219199717500973

R. Kajikiya, I. Sim and S. Tanaka, Symmetry-breaking bifurcation for the Moore-Nehari differential equation, *NoDEA Nonlinear Differential Equations Appl.* 25 (2018), no. 6, Art. 54, 22 pp.

DOI: 10.1007/s00030-018-0545-3

T. Kanemitsu and S. Tanaka, Box-counting dimension of oscillatory solutions to the Emden-Fowler equation, *Differ. Equ. Appl.* 10 (2018), no. 2, 239-250.

DOI: 10.7153/dea-2018-10-17

Y. Naito, M. Pasic and S. Tanaka, Rectifiable and nonrectifiable solution curves of half-linear differential systems, *Math. Slovaca* (2018), no. 3, 575-590.

DOI: 10.1515/ms-2017-0126

R. Kajikiya, I. Sim and S. Tanaka, A complete classification of bifurcation diagrams for a class of (p,q) -Laplace equations, *J. Math. Anal. Appl.* 462 (2018), no. 2, 1178-1194.

DOI: 10.1016/j.jmaa.2018.02.049

M. Onitsuka and S. Tanaka, Box-counting dimension of solution curves for a class of two-dimensional nonautonomous linear differential systems, *Math. Commun.* 23 (2018), no. 1, 43-60.

<http://www.mathos.unios.hr/mc/index.php/mc/article/view/2334>

T. Kanemitsu and S. Tanaka, Nonrectifiable oscillatory solutions of second order linear differential equations, *Arch. Math. (Brno)* 53 (2017), no. 4, 193-201.

DOI: 10.5817/AM2017-4-193

S. Tanaka, Symmetry-breaking bifurcation for the one-dimensional Liouville type equation, *J. Differential Equations* 263 (2017), no. 10, 6953-6973.

DOI: 10.1016/j.jde.2017.07.033

M. Onitsuka and S. Tanaka, Characteristic equation for autonomous planar half-linear differential systems, *Acta Math. Hungar.* 152 (2017), no. 2, 336-364.

DOI: 10.1007/s10474-017-0722-6

R. Kajikiya, M. Tanaka and S. Tanaka, Bifurcation of positive solutions for the one-dimensional (p,q) -Laplace equation, *Electron. J. Differential Equations* 2017 (2017), Paper No. 107, 37 pp.

<https://ejde.math.txstate.edu/>

M. Onitsuka and S. Tanaka, Rectifiability of solutions for a class of two-dimensional linear differential systems, *Mediterranean Journal of Mathematics* 14 (2017), no. 2, Art. 51, 11 pp.

DOI: 10.1007/s00009-017-0854-5

M. Pasic and S. Tanaka, Non-monotone positive solutions of second-order linear differential equations: existence, nonexistence and criteria, *Electron. J. Qual. Theory Differ. Equ.* 2016 (2016), Paper No. 93, 25 pp.

DOI: 10.14232/ejqtde.2016.1.93

S. Tanaka, Uniqueness of sign-changing radial solutions for $-u-u|u|^{p-1}=0$ in some ball and annulus, *J. Math. Anal. Appl.* 439 (2016), no. 1, 154-170.

DOI: 10.1016/j.jmaa.2016.02.036

I. Sim and S. Tanaka, Three positive solutions for one-dimensional p -Laplacian problem with sign-changing weight, *Appl. Math. Lett.* 49 (2015), 42-50.

DOI: 10.1016/j.aml.2015.04.007

[学会発表](計 20 件)

田中敏, Inbo Sim, 梶木屋龍治, Symmetry-breaking bifurcation of positive solutions to the Moore-Nehari differential equation, 日本数学会 2018 年度秋季総合分科会, 2018

S. Tanaka, Symmetry-breaking bifurcation for the Moore-Nehari differential equation, 12th AIMS International Conference on Dynamical Systems, Differential Equations and Applications, 2018

S. Tanaka, Bifurcation of positive solutions for two classes of one-dimensional (p,q) -Laplace equations, NTHU Department of Mathematics Visiting Scholar Colloquium, 2018

S. Tanaka, Box-counting dimension of discrete spirals and its application to difference equations, ICDEA 2018, 2018

梶木屋龍治, Inbo Sim, 田中敏, A complete classification of bifurcation diagrams for a class of (p,q) -Laplace equations, 日本数学会 2018 年度年会, 2018

鬼塚政一, 田中敏, Box dimension of solution curves for a class of two-dimensional linear differential systems, 日本数学会 2018 年度年会, 2018

田中敏, 鬼塚政一, Characteristic equation for autonomous planar half-linear differential systems, 日本数学会 2018 年度年会, 2018

S. Tanaka, Morse index and symmetry-breaking bifurcation of positive solutions to the one-dimensional Liouville type equation, Nonlinear Analysis, PDEs, and Applications : A Conference in Honor of Yong-Hoon Lee's 60th Birthday, 2018

S. Tanaka, Symmetry-breaking bifurcation for positive solutions of the one-dimensional Henon equation, Equadiff 2017, 2017

S. Tanaka, Symmetry-breaking bifurcation for the one-dimensional Henon equation, 2017 International Workshop on Nonlinear PDE and Applications, 2017

田中敏, Symmetry-breaking bifurcation for the one-dimensional Henon equation, 日本数学会 2017 年度年会, 2017

S. Tanaka, Asymptotic behavior of solutions to autonomous planar half-linear differential systems, ICDDEA 2017, 2017

S. Tanaka, Bifurcation of positive solutions for the one-dimensional (p,q) -Laplace equation, 11th AIMS International Conference on Dynamical Systems, Differential Equations and Applications, 2016

田中敏, Morse index and symmetry-breaking bifurcation for the one-dimensional Liouville type equation, 日本数学会 2016 年度年会, 2016

鬼塚政一, 田中敏, Attractivity, rectifiability and non-rectifiability of solutions for two-dimensional linear differential systems, 日本数学会 2016 年度年会, 2016

S. Tanaka, A symmetry-breaking bifurcation for a one-dimensional Liouville type equation, 3rd Chile-Japan Workshop on Nonlinear PDEs, 2015

S. Tanaka, Symmetry-breaking bifurcation of positive solutions to a one-dimensional Liouville type equation, RIMS 研究集会 実領域における常微分方程式の定性的研究, 2015

田中敏, Uniqueness of sign-changing radial solutions for the scalar field equation in some ball and annulus, 日本数学会 2015 年度秋季総合分科会, 2015

S. Tanaka, Uniqueness of sign-changing radial solutions for scalar field equations in some ball and annulus, Equadiff 2015, 2015

S. Tanaka, A note on the uniqueness of sign-changing radial solutions for scalar field equations, The 10th AIMS Conference on Dynamical Systems Differential Equations and Applications, 2014

6 . 研究組織

(1)研究分担者

なし

(2)研究協力者

研究協力者氏名：鬼塚 政一 (Masakazu Onitsuka)

研究協力者氏名：内藤 雄基 (Yuki Naito)

研究協力者氏名：梶木屋 龍治 (Ryuji Kajikiya)

研究協力者氏名：田中 視英子 (Mieko Tanaka)

研究協力者氏名：兼光 孝直 (Takanao Kanemitsu)

研究協力者氏名：塩路 直樹 (Naoki Shioji)

研究協力者氏名：渡辺 宏太郎 (Kohtaro Watanabe)

研究協力者氏名：Mervan Pasic

研究協力者氏名：Inbo Sim

研究協力者氏名：Fentao Wu

研究協力者氏名：Shin-Hwa Wang

研究協力者氏名：Kuo-Chih Hung

研究協力者氏名：Raul Manasevich

研究協力者氏名：Marta Garcia-Huidobro

科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属されます。