

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 30 年 6 月 19 日現在

機関番号：32658

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2014～2017

課題番号：26400183

研究課題名(和文)非線形結合振動子系の同期モードと時間遅れの影響に関する研究

研究課題名(英文)Studies on the synchronization modes and the effect of delays for nonlinear coupled oscillators

研究代表者

江上 親宏 (Egami, Chikahiro)

東京農業大学・地域環境科学部・准教授

研究者番号：90413781

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 2,600,000円

研究成果の概要(和文)：本研究では、リミットサイクル振動子による結合振動子系における同期モードの共存、強制引き込み現象および結合の時間遅れの影響について、理論と実験の両面からのアプローチを推進した。主な研究対象を化学振動子のBelousov-Zhabotinsky(BZ)反応とvan der Pol型発振回路とし、これらで構成される結合振動子系の周期解の存在性、安定性、共存に関する数学解析とシミュレーションに取り組んだ。また、解析結果を実証する実験データの取得も試みた。

研究成果の概要(英文)：This study examined the coexistence of synchronization modes, the entrainment phenomena, and the effects of delays on the dynamics for the coupled limit cycle oscillators using both theoretical and experimental approaches. In particular, we analyzed the existence, stability, and coexistence of limit cycles for the coupled Belousov-Zhabotinsky reaction system and the coupled van der Pol type oscillator. Moreover, some experiment systems were developed for the demonstration of mathematical results.

研究分野：非線形解析, 数理生物学

キーワード：結合振動子系 リズム現象 同期モード Hopf分岐 分岐解析 伝染病モデル

1. 研究開始当初の背景

(1) リミットサイクル振動子とは、システムに内生的な周期で軌道安定な振動を発生させる非線形振動子である。リミットサイクルの存在と安定性に関する問題とは、まさに Hopf 分岐の存在と方向性 (Supercritical, Subcritical) について調べることを指す。

リミットサイクル振動子を複数結合した結合振動子系の研究は、物理学の世界で長い歴史をもち、近年では生物学、生命科学、ロボット制御工学などの分野でも応用が進んでいる。

結合振動子系は「同期 (Synchronization)」を起こす。同期とは、似た性質の振動子同士を結合させたとき、共通の周期 (振動数) を持つ振動に陥る現象であり、同相 (in-phase)、逆相 (anti-phase)、異相 (out-phase) の同期モードが存在する。1 つの結合振動子系に対して同期モードは必ずしも 1 種類とは限らず、複数の安定周期解が共存し、初期条件次第でいずれの解に漸近するか変わる場合がある。

一方、リミットサイクル振動子は「強制引き込み (Entrainment)」を起こす。これは、リミットサイクル振動子にある一定範囲の振動数で外部摂動を加えたとき、互いの振動数に差があると振動子が振動数を変化させて外部摂動に同調する現象のことである。

1970 年代以降、リミットサイクル振動子の結合振動子系の同期現象について Strogatz、Kuramoto 等を中心とする研究者によって深く研究されてきた。よく知られるとおり、同期と相転移の本質を記述する位相方程式として Kuramoto model は完成形である。しかしながら、実際の応用上は現象を具体的に記述するモデルの精緻な解析が必要になる。

(2) 近年、状態の履歴を考慮した微分方程式 (関数微分方程式) の重要性が認識されており、生物学と経済学分野を中心に盛んな研究が行われている。時間遅れは分岐やカオスを引き起こし、解の構造安定性に影響を与える要因であることが認知される一方で、その解析的な取扱いが常微分方程式と比較して格段に難しく、特にシステムに対する一般的な解析手法は発展の途にある。

(3) 写像度理論は非線形解析における強力なツールであり、写像度にはいくつかの種類がある。既往の研究から時間遅れの有無によらず、次の使い分けが考えられる： 自励系における非自明な周期を持つ周期解の存在問題 (Hopf 分岐解析) には、 S^1 -degree [Dylawerski et al., Ann. Plon. Math. vol.62 (1991), pp.243-280] が有望である。

非自励系における自明な周期を持つ周期解の存在問題には、Coincidence degree [Gaines and Mawhin, LNM 568 (1977)] が有用である。

ところが、一般的に写像度では解の存在・非存在や個数を調べることはできても、解の

安定性は判定できない。そこで、解の存在性と安定性を合わせて解析する手法の開発が求められる。

2. 研究の目的

本研究では、リミットサイクル振動子による結合振動子系における同期モードの共存、強制引き込み、結合の時間遅れの影響の数理解析を目的とする。特に、写像度理論と位相縮約理論を融合して、周期解の分岐・安定性解析の新技术を開発する。主な研究対象は、Belousov-Zhabotinsky (BZ) 反応系と van der Pol 型方程式系とする。安定なリミットサイクルの共存問題においては、 S^1 -degree と位相縮約法を組み合わせるリミットサイクルの振動数を区別する方法を考案する。周期的な外部摂動による強制引き込み現象に対しては、Coincidence degree と位相縮約法を組み合わせる解の安定性判別的手法を提示する。

また、本研究では実験と理論解析の両輪により数学協働の成果を追求する。数学的視点から定理に沿って結合力や時間遅れの大きさを調節できるような工夫を施した実験系を再設計・構築し、モデルの解析結果を実証する観測データの取得を目指す。

3. 研究の方法

(1) van der Pol 型結合振動子系のモデリング、シミュレーションおよび実験観測によりリミットサイクルの共存条件を調べ、理論解析の方針を検討する。特に、3 つの振動子を結合したシステムの回転対称性に焦点を当てる。

(2) BZ 反応では、触媒としてセリウムを用いる Field-Körös-Noyes (FKN) 反応機構 (Oregonator) と、フェロインを用いる Rovinsky-Zhabotinsky (RZ) 反応機構が良く知られている。FKN モデルの反応溶液は黄色と無色を振動し、RZ モデルは青色と赤色を振動する。各モデルは反応物質の濃度に応じた固有の周期を持つが、溶液にセリウムとフェロインを同時に投入すると 2 つの振動系の相互同期が起こり、全く別の周期で 4 色 6 段階の振動現象が発生する。このリズム現象の観測データに対して、モデリングと数学解析による理論的な証明を完成する。

(3) ポンプ結合による 2 槽時間遅れ結合 BZ 反応系は、適当な結合強度の下で時間遅れが大きくなるとリミットサイクルが分岐を起こし 2 個の安定解が共存する。結合強度と時間遅れが同期モードに与える影響について、実験と数理モデルの解析により研究する。

(4) テンサイにおける代表的な伝染病はそう根病であり、病気の媒介者 *P. betae* の活動性は土壌水分、pH、温度などに依存することが知られている。そこで、地温と降雨が病

気の広がりを与える影響を分析するために、テンサイの成長と媒介者との相互作用を記述する ODE モデルを拡張して解のダイナミクスを調べる。本研究テーマでは、周期的な環境を持つ非自励系モデルの解析手法を確立するという点において、強制引き込み解析とよく似た数学理論を用いる。

4. 研究成果

(1) 3 つの van der Pol 振動子による結合振動子系において、システムの対称性とリミットサイクルの個数の関係について数値解析および実験観測により研究した。モデリングとシミュレーションにより、システムが S3 対称性をもつ場合、6 個の安定なリミットサイクル (in-phase が 1 個、2-in-phase が 3 個、rotating が 2 個) が共存可能であることが分かった。これは、Balanov et al. [Topol. Methods Nonlinear Anal., vol.27 (2006), pp.29-90] による数学解析の結果を視覚化した成果である。一方、実験では 2-in-phase と rotating の共存を示すデータは取得可能である一方で、同じ回路系を用いて in-phase の観測は実現困難であることを、Ashwin et al. [Nonlinearity, vol.3 (1990), pp.585-601] の先行研究と照らして分析した。また、システムが対称性を失うと複数のリミットサイクルの共存は起こらないことも判明した。当研究成果は論文にまとめ、専門誌に掲載された。

(2) 2 種類の触媒 (セリウムとフェロイン) が作用する BZ 反応系について、従来ある FKN 機構と RZ 機構を組み合わせたハイブリッド反応機構を提案し、3 つの中間生成物質の濃度を変数とする縮約モデルを構築した。このモデルに Liu [J. Math. Anal. Appl., vol.182 (1994), pp.250-256] の分岐定理を適用して Hopf 分岐の存在を示すことにより、3 次元状態空間内の Limit cycle という形で ORP 振動と色の変化の本質について理論的な証明を完成した。当成果について、定量的な観測データと照合してまとめた論文が専門誌に掲載された。

(3) 同一の BZ 反応槽をポンプとチューブでつなぐ実験系 (図 1) を構築し、ポンプの ON/OFF を繰り返しながら、各槽の酸化還元電位の時間変化を記録した。

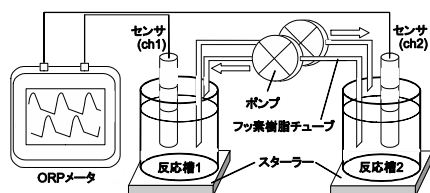


図 1: ポンプ結合反応槽

実験の結果、時間遅れが小さい場合には同相モードしか存在しないが、時間遅れがある程

度大きくなると同相モードと逆相モードが共存することを示すデータの取得に成功した。

対称性をもつ 2 槽時間遅れ結合 BZ 反応系は、次式 (C) でモデル化される：

$$(C) \begin{cases} \varepsilon \dot{x}_i = x_i(1-x_i) - \alpha z_i \frac{x_i - \mu}{x_i + \mu} \\ \quad \quad \quad + c(x_j(t-\tau) - x_i) \\ \dot{z}_i = x_i - z_i + c(z_j(t-\tau) - z_i) \end{cases}$$

ここで、 $\varepsilon > 0$, $\alpha > 0$, $\mu \in (0,1)$, $i, j \in \{1,2\}$, $i \neq j$ である。時間遅れ $\tau > 0$ は図 1 の反応槽を接続するチューブの長さ、結合定数 $c > 0$ はポンプの流量に対応する。特にこの値とリミットサイクルの個数の関係に注目し、BZ 反応系における同相と逆相の共存は結合項の時間遅れが本質的要因であることの証明を目指している。

証明手順は、次のとおりである：スケール変換により (C) の時間遅れを形式的に 1 とすれば、 τ が係数として項の前に出る。周期解を Hilbert 空間上で S^1 -equivariant compact mapping の不動点として表現する。

を用いた条件の下でホモトピーを構成し、解写像の S^1 -degree を計算する。現状、手順 について Balanov et al. によって確立された計算手法の適用を進めている。

(4) テンサイにおけるそう根病の感染経路には、休眠孢子による一次感染と、遊走子による二次感染がある。この病気の感染動態について、Webb et al. [Plant Pathology, vol.49 (2000), pp.600-607] は 7 変数から成る SIR モデルを用いてモデル化した。

我々は、病気の潜伏期間と一次感染の強さは地温の影響を受け、二次感染の強さは土壌の体積含水率の影響を受けることを仮定し、モデルの拡張に取り組んだ。ここで、降雨による含水率の時間変化は、近藤 [水文・水資源学会誌, vol.6 (1993), pp.336-343] による物理実験および統計分析に基づく研究成果を参考にした。

構築した拡張モデルの数値シミュレーションの結果、早期の播種が感染拡大防止に有効であることが明らかになった。また、仮定の降雨を用いた数値実験の結果、大雨の時期によって感染拡大を招く可能性が示された。今回構築したモデルは、そう根病以外にも、これに似た感染経路を持つ植物の伝染病に対して応用可能であり、農作物収量のリスクマネジメントなどへの利用が想定される。以上の成果について学会報告を行ったが、今後は数学解析による定理の構築を進める。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕(計 2 件)

Chikahiro Egami, Mechanism for the color transition of the Belousov-Zhabotinsky reaction

catalyzed by cerium ions and ferroin, Discrete and Continuous Dynamical Systems Series B, in press (2017), pp.1-18, 査読有.
DOI:10.3934/dcdsb.2018061

Chikahiro Egami, Takuma Yoshida, Experimental Study on the Coexistence of Multiple Limit Cycles for Coupled van der Pol Oscillators, Journal of Nonlinear and Convex Analysis, vol.18 (2017), no.7, pp.1279-1296, 査読有.

〔学会発表〕(計3件)

森陽生, 江上親宏, テンサイそう根病流行の地温・土壌水分依存モデル, 第4回数理生物学交流発表会, 2018年3月.

江上親宏, BZ 反応による時間遅れ結合振動子系の実験と解析, 第32回なかもず解析セミナー, 2015年12月.

吉田拓馬, 江上親宏, 牛丸真司, van der Pol 型結合振動子系におけるリミットサイクルの多重存在性と結合条件, 富士山麓アカデミック&サイエンスフェア 2014, 予稿集 p.16, 2014年11月.

6. 研究組織

(1)研究代表者

江上 親宏 (EGAMI, Chikahiro)
東京農業大学・地域環境科学部・准教授
研究者番号: 90413781

(2)研究分担者

なし

(3)連携研究者

なし

(4)研究協力者

なし