

平成 30 年 5 月 22 日現在

機関番号：11501

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2014～2017

課題番号：26400185

研究課題名(和文)ブロッキング型及びアンチブロッキング型整数多面体の類似性についての研究

研究課題名(英文)Similarities between the blocking and anti-blocking polyhedra

研究代表者

佐久間 雅 (Sakuma, Tadashi)

山形大学・地域教育文化学部・准教授

研究者番号：60323458

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,600,000円

研究成果の概要(和文)： : Cornuejols, Guenin and Margotの予想を解くためのスキームを提示し、Cornuejols, Guenin and TuncelのOpen Problemの類似を証明した。当該論文は、Springer monograph (Indian Statistical Institute Series)として出版予定である。 : コードダイアグラムの展開式を用いてTutte polynomialの $(x,y)=(2,-1)$ における値の組合せ論的意味付けを与えた。 : グラフにおける新しいパラメータである安全数を定義し、その様々なグラフ理論的性質および計算量的評価について明らかにした。

研究成果の概要(英文)：1): We give a scheme to attack the following conjecture proposed by Cornuejols, Guenin and Margot: "Every ideal minimally non-packing clutter has a transversal of size 2." Moreover, we show that the clutter of a combinatorial affine plane does not have any ideal minimally non-packing clutter of blocking number at least 3. 2): We prove that the chord expansion number equals the value of the Tutte polynomial at the point $(2,-1)$ for its corresponding interlace graph. 3): A safe set of a graph $G=(V,E)$ is a non-empty subset S of V such that for every component A of $G[S]$ and every component B of $G[V-S]$, we have $|A|+1>|B|$ whenever there exists an edge of G between A and B . We give several graph theoretical properties of this concept. Furthermore we evaluate computational complexities of the problem of computing the minimum weight of a safe set on several graph classes.

研究分野：組合せ最適化、離散数学

キーワード：Ideal clutter Packing Property MFMC Property Tutte Polynomial Chord Diagram safe set network majority

1. 研究開始当初の背景

(0,1)-Matrices A, B により規定される、Anti-Blocking Type の不等式系と、Blocking Type の不等式系の間の深遠なアナロジーの解明は、1960年代の Fulkerson や Edmonds, Lehman, Lovasz, Padberg 等の輝かしい一連の研究を端緒として、現在も大きく研究が進展し続けている組合せ最適化分野のプリンシパルな研究領域である。2002年5月 Cornuejols や Seymour 等によって、一般の Anti-Blocking Type TDI 不等式系の禁止構造型の定理と分解定理が得られた。すなわち強理想グラフ予想(略して SPGC) の肯定的解決である。ただし、彼らの証明は長く煩雑であり、簡潔な別証明を求める取り組みが続けられている。この方向における代数的なアプローチとしては、clique matrix が circulant になる partitionable graph (near factorization) を特徴付ける、いわゆる Grinstead の予想が有名であるが、依然として未解決である。一方の Blocking Type 不等式系の整数性や TDI 性の特徴付けに関しては、未だその本質的な部分が未解明である。

2. 研究の目的

Conforti & Cornuejols の予想及び Grinstead の予想は、当該研究領域における2つの重要な未解決予想であるが、本研究ではこれらの予想の完全解決を究極の目標として、計算機による数値実験、super-conjecture や sub-conjecture の定式化及びその証明を行い、Anti-Blocking 型と Blocking 型の双方の整数多面体に普遍する新たな構造定理を抽出するなど、関連する様々な取り組みを行う。

3. 研究の方法

柏原 賢二 と 佐久間 雅 は Conforti & Cornuejols の予想を包含する予想である、Cornuejols, Guenin and Margot の予想に対する解決スキームを定式化(2012年: arXiv:1210.4753)を提案した。一方、佐久間雅と篠原英裕は、「S. Szabo & A.D. Sands の問題」(Grinstead の予想の部分予想)及びその Blocking Type counter-part を解決(2013年: EuroComb2013)した。本研究においては、上記の2つの結果を受け、下記の2つの予想の完全解決を究極の目標として、計算機による数値実験、super-conjecture や sub-conjecture の定式化及びその証明を行い、Anti-Blocking 型と Blocking 型の双方の整数多面体に普遍する新たな構造定理を抽出するなど、関連する様々な取り組みを行う。Conjecture 1 (Conforti & Cornuejols 1993) クラッターにおける MFMC-性 と packing property とは等価な概念である。

Conjecture 2 (Grinstead 1984; 佐久間 & 篠

原 2011) 有限巡回群上の任意の near-factorization (resp. 1-overlapped factorization) は、DBNS 型の near-factorization (resp. 1-overlapped factorization) である。

Conjecture 1 は Anti-Blocking 型 TDI における Replication Lemma の Blocking 型 TDI における counterpart であり、組合せ最適化理論分野における最も重要な未解決予想である。ただし、本研究では柏原 & 佐久間 (2012年: arXiv:1210.4753) の方針に従い、直接 Conjecture 1 を扱う代わりに、この予想を imply する(より tractable な)下記の予想(Conjecture 3) にターゲットを絞って考察する。

Conjecture 3 (Cornuejols, Guenin and Margot 2000) クラッターが minimally non-packing (packing property を持たないという意味で極小) かつ ideal ならば、そのプロッキング数は2である。Conjecture 2 もまた、Anti-Blocking 型と Blocking 型の(極小非) 整数多面体に普遍する構造の存在を指摘している。この予想は既に、柏原 & 佐久間(2006年)、佐久間 & 篠原(2011年)、そして佐久間 & 篠原(2013年)により、部分的に解かれている。本研究では、これら一連の成功事例において用いられた種々の手法(計算実験、グラフ理論、代数的組合せ論、整数論、etc) を駆使して、Conjecture 2 に取り組む。

4. 研究成果

: 東京大学の柏原氏との共著で、Cornuejols, Guenin and Margot の予想を解くためのスキームを用いて、Cornuejols, Guenin and Tuncel の未解決問題の ideal packing clutter における類似(「Fano Plane 以外の射影平面は、ideal minimally non packing clutter の tilde core にならない。」)を証明した。当該研究成果は Springer monograph (Indian Statistical Institute Series) として出版予定である。

: 篠原英裕氏との共同研究において、Grinstead の予想及びその Blocking Type の類似について様々な部分的結果を得た。当該結果の一部は Journal of Algebraic Combinatorics に出版されている。その他の結果は3本の投稿論文として準備中である。

: 河原林健一氏、藤田慎也氏、千葉周也氏との共同研究としてグラフ上の偶数サイクルパッキングに関する結果を得た。当該研究成果は Advance in Applied Mathematics に掲載されている。

: 中上川友樹氏、藤田慎也氏との共同研究として、グラフの頂点上に配置した石を交換する数理モデル(Pebble motion problem)の一般化について研究し、種々の成果を得た。当該成果は Discrete Applied Mathematics 誌に掲載された。

: グラフ上のバランス彩色を用いて

$|V(G)|/2$ -連結グラフを特徴付ける定理の非常に短い証明を得た。この証明の中で、バランス彩色とグラフマッチングとの間に成り立つ美しい関係が示された。当該結果は *Graphs and Combinatorics* 誌に掲載された。

：藤田慎也氏、カナダ・ピクトリア大学の Gary MacGillivray 氏との共同研究において、グラフの新しい不変量である安全集合を定義し、そのグラフ理論的な性質や計算量について種々の結果を得た。当該成果は *Discrete Applied Mathematics* 誌に掲載された。

：ハンガリー・レニー研究所の Z. Tuza 氏、熊本大学の大館氏等 13 人の研究者との共同研究において、懸案であった、木幅が定数で抑えられるグラフの族に対する最小安全集合を計算する多項式時間のアルゴリズムを構成した。当該結果は *Journal of Combinatorial Optimization* に掲載された。

：インド統計学研究所の R.B. Bapat 氏や、ハンガリー・レニー研究所の Z. Tuza 氏などを含む 7 名の研究者との共同研究において、重み付き安全集合概念を用いてネットワーク上の多数決問題を解析する方法を提案し、関連する組合せ最適化問題（最小重み安全集合問題）に関する計算量評価や 2 - 近似アルゴリズムを得た。当該結果は *Networks* に掲載された。

：中上川友樹氏との共著において、コードダイアグラムの展開式を用いて Tutte polynomial の $(x,y)=(2,-1)$ における値の組合せ論的意味付けを世界で初めて与えた。当該論文は *Discrete Math* において出版された。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計 11 件)

Kenji Kashiwabara, Tadashi Sakuma, On ideal minimally non-packing clutters, *Mathematical Programming and Game Theory (Springer research monograph)*, 2018 年 (in press)

Tomoki Nakamigawa, Tadashi Sakuma, The Expansion of a Chord Diagram and the Tutte Polynomial, *Discrete Mathematics*, **341** 1573-1581, 2018 年 06 月

Ravindra B. Bapat, Shinya Fujita, Sylvain Legay, Yannis Manoussakiss, Yasuko Matsui, Tadashi Sakuma, Zsolt Tuza, Safe Sets, Network Majority on Weighted Trees, *Networks*, **71**(1) 81-92, 2018 年 01 月

Raquel Águeda, Nathann Cohen, Shinya Fujita, Sylvain Legay, Yannis Manoussakis, Yasuko Matsui, Leandro Montero, Reza Naserasr, Hirotaka Ono, Yota Otachi, Tadashi Sakuma, Zsolt Tuza, Renyu Xu, Safe sets in graphs: Graph classes and structural parameters, *Journal of Combinatorial*

Optimization, 2017 年 11 月

Tomoki Nakamigawa, Tadashi Sakuma, The Expansion of a Chord Diagram and the Tutte Polynomial (Proceedings of European Conference on Combinatorics, Graph Theory and Applications 2017), Amsterdam: Elsevier. *Electronic Notes in Discrete Mathematics*, **61C** 917-923, 2017 年 08 月

Shinya Fujita, Gary MacGillivray, Tadashi Sakuma, Safe set problem on graphs, *Discrete Applied Mathematics*, **215** 106-111, 2016 年 12 月

Ravindra B. Bapat, Shinya Fujita, Sylvain Legay, Yannis Manoussakis, Yasuko Matsui, Tadashi Sakuma, Zsolt Tuza, Network Majority on Tree Topological Network, *Electronic Notes in Discrete Mathematics*, **54** 79-84, 2016 年 10 月

Raquel Águeda, Nathann Cohen, Shinya Fujita, Sylvain Legay, Yannis Manoussakis, Yasuko Matsui, Leandro Montero, Reza Naserasr, Yota Otachi, Tadashi Sakuma, Zsolt Tuza, Renyu Xu Safe Sets in Graphs: Graph Classes and Structural Parameters, *Lecture Notes in Computer Science*, **10043** 241-253, 2016 年 10 月

Tadashi Sakuma, On the Balanced Decomposition Number, *Graphs and Combinatorics*, **31**(6) 2377-2380, 2015 年 11 月

Shinya Fujita, Tomoki Nakamigawa, Tadashi Sakuma, Pebble exchange on graphs, *Discrete Applied Mathematics*, **184**(31) 139-145, 2015 年 03 月

Tadashi Sakuma, Hidehiro Shinohara, On circulant thin Lehman matrices, *Journal of Algebraic Combinatorics*, **40**(4) 939-959, 2014 年 12 月

[学会発表](計 4 件)

Tadashi Sakuma, International Symposium on Operations Research and Game Theory: Modeling and Computation, 国際会議, 2018 年 01 月, Indian Statistical Institute, Delhi Centre, "Safe sets in graphs", 口頭 (招待・特別)*ただし、この講演自体は、インド渡航直前に講演者の佐久間雅が前十字靭帯断裂の大けがを負ったため、キャンセルとなった。

Tadashi Sakuma, Nonlinear Analysis and Convex Analysis 2017, July 4-9 2017 at Chitose City Cultural Center Hokkaido, Chitose, Hokkaido, Japan, "Minimally non-ideal clutters and ideal minimally non-packing clutters" 口頭 (一般)
Tadashi Sakuma, 2017 Symposium on

Mathematical Programming and Game Theory (2017 SMPGT), 国際会議, 2017年01月, Indian Statistical Institute, Delhi Centre, "Similarities and dissimilarities between the blocking and anti-blocking polyhedral", 口頭
(招待・特別)

佐久間 雅, 日本数学会 2016 年度年会特別講演 (応用数学分科会), 国内会議, 2016 年 03 月, 筑波大学, ブロッキング型及びアンチブロッキング型整数多面体の類似性について, 口頭 (招待・特別)

〔図書〕(計 0 件)

〔産業財産権〕

出願状況 (計 0 件)

取得状況 (計 0 件)

〔その他〕

ホームページ等

6. 研究組織

(1) 研究代表者

佐久間 雅 (SAKUMA, Tadashi)

山形大学・地域教育文化学部・准教授

研究者番号: 60323458

(2) 研究分担者

柏原 賢二 (KASHIWABARA, Kenji)

東京大学・大学院総合文化研究科・助教

研究者番号: 70282514

(3) 連携研究者

八森 正泰 (HACHIMORI, Masahiro)

筑波大学・システム情報系・准教授

研究者番号: 00344862

中村 政隆 (NAKAMURA, Masataka)

東京大学・大学院総合文化研究科・准教授

研究者番号: 90155854

(4) 研究協力者

篠原 英裕 (SHINOHARA, Hidehiro)