

**科学研究費助成事業 研究成果報告書**

平成 29 年 6 月 12 日現在

機関番号：12608

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2014～2016

課題番号：26420343

研究課題名(和文) スムースRenyiエントロピー・ダイバージェンスを用いた情報理論の再定式化

研究課題名(英文) Reformulation of Information Theory by Using Smooth Renyi Entropy and Divergence

研究代表者

植松 友彦 (UYEMATSU, Tomohiko)

東京工業大学・工学院・教授

研究者番号：60168656

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 2,600,000円

研究成果の概要(和文)：本研究では、スムースRenyiエントロピーあるいはスムースRenyiダイバージェンスという情報の尺度を利用することで、情報理論の各種問題を再定式化を行うとともに、統一的な証明手法を確立することを目的とし、次の問題の再定式化を行った。(1)一つあるいは複数の情報源の出力系列から(独立な)一様乱数を取り出す乱数生成問題における乱数生成レートの限界、(2)歪みを許した符号化問題における歪みと符号化率のトレードオフ関係、(3)相関を有する複数の情報源の符号化問題における各符号器の圧縮率の限界、(4)複数の送信者が単一の受信者に情報を送信する際の伝送速度の限界。

研究成果の概要(英文)：We reformulate various problems in information theory by using the smooth Renyi entropy and divergence, and provide a unified method to prove coding theorems. Actually, we reformulated following information theoretic problems: (1) The bound on the generation rates of uniform random numbers from output sequences of one or many sources. (2) The tradeoff relation between the distortion level and the rate of the encoder for source coding problems allowing the distortion. (3) The region of coding rates for source coding problems of correlated multiple sources. (4) The region of transmission rates for reliable communication through multiple inputs and single output channels.

研究分野：情報理論

キーワード：ネットワーク情報理論 一般情報源 一般通信路 スムースRenyiエントロピー スムースRenyiダイバージェンス

## 様式 C-19、F-19-1、Z-19、CK-19 (共通)

### 1. 研究開始当初の背景

1993年にHanとVerduは、一般情報源あるいは一般通信路と呼ばれる非定常あるいは非エルゴードな情報源や通信路に対する情報理論の研究を創始し、後にHanは一般情報源や一般通信路を統一的に取り扱う為の手法を「情報スペクトルの理論」として体系化し、最も一般的な情報理論を構築した。しかしながら、スペクトルの理論によれば、エントロピーや通信路容量に対応する各種符号化の限界を導出できるものの、現実的な問題である有限長の系列に対する符号化の限界を求めることが困難であった。

他方、2004年にRennerとWolfはRenyiエントロピーを一般化したスムーズRenyiエントロピーという概念を提案し、情報源の固定長符号化問題について、許容誤り率と系列長が与えられたときに、符号化レートの上界と下界がスムーズRenyiエントロピーを用いて表せることを示すと共に、得られた上界と下界の極限は共に情報スペクトルの理論で得られる最大許容符号化レートに一致することを明らかにした。その後、2009年にRennerらのグループはスムーズRenyiダイバージェンスという概念を提案し、一般通信路の通信路符号化問題について、許容される復号誤り率と有限の符号長が与えられたとき、符号化レートの上界と下界を導くと共に、符号長を長くしたときの極限が情報スペクトルの理論によって得られる通信路容量と一致することを明らかにした。

一般に、スムーズRenyiエントロピーやスムーズRenyiダイバージェンスを用いた情報理論の再定式化は次の2つの特徴を有している。

- (1) 情報理論の各種問題に対し、スムーズRenyiエントロピーやスムーズRenyiダイバージェンスは、符号長有限の場合における符号化の限界を与えているという点で操作的な意味を有する。
- (2) 符号長を長くしたときのスムーズRenyiエントロピーやスムーズRenyiダイバージェンスの極限は、情報スペクトルの理論による究極的な符号化の限界と一致する。

従って、有限の符号長においてこれらの情報量を用いて符号化レートの上界や下界を作れば、極限操作を行うことだけで、漸近的な性能限界が得られ、有限と無限の場合を統一的に取り扱う定式化ができると考えられる。

申請者らは、2009年の国際会議でRennerらのグループの発表を直接聞き、上記の特徴に着目し、情報理論の各種問題のスムーズRenyiエントロピーを用いた再定式化について研究を開始し、2013年末までに以下の問題について統一的な証明手法を確立することに成功した。

- (1) 一般情報源の固定長符号化問題

- (2) 一般情報源の出力系列から写像によって一様乱数を生成する intrinsic randomness 問題
- (3) 一様乱数を用いて一般情報源の出力系列をシミュレーションする resolvability 問題

これらの成果を他の情報理論の問題に対して広げることを考え、本研究を開始した。

### 2. 研究の目的

本研究では、スムーズRenyiエントロピーあるいはスムーズRenyiダイバージェンスを用いてまだ再定式化されていない情報理論の問題について、これらの情報量を用いて再定式化を行うと共に、統一的な証明手法を確立することを目的としている。具体的には、一般情報源あるいは一般通信路に関する次の問題を再定式化することを重点におく。

- (1) Intrinsic randomness の2次の乱数生成レート
- (2) レート歪み関数
- (3) Slepian-Wolf 符号化問題
- (4) マルチアクセス通信路の符号化問題
- (5) 相関のある複数の情報源から互いに独立な乱数を生成する問題

これらの問題において、誤り率や近似誤差の制約の方法、あるいは符号化レートの定義によらず適用できる統一的な証明手法を確立し、スムーズRenyiエントロピーあるいはスムーズRenyiダイバージェンスを用いた符号化の限界式を導出する。

一方、これらの符号化の限界式の導出に加えて、応用上重要となる無記憶情報源や無記憶通信路においては、得られた符号化の限界式が有限長では実際に厳しいものであることを確認すると共に、系列長を無限に長くしたときに、情報スペクトルの理論によって既に得られている限界式と一致することを明らかにすることも目標とする。

### 3. 研究の方法

次の7つの問題について検討を行う。

- (1) 2つの情報源を独立に符号化して復号器に送り、復号器では全ての情報源の系列を復元する Slepian-Wolf 符号化問題について検討し、符号化する系列の長さが長くなったときに誤り率が指定された値以下になるという条件下で2つの符号器の符号化レート対の満足すべき領域を明らかにする。
- (2) 一般情報源の歪みを許した符号化の限界であるレート歪み関数をスムーズRenyiダイバージェンスによって表す方法を明らかにする。
- (3) Intrinsic randomness 問題とは、一般情報源から出力される長さ  $n$  の系列を整数の集合  $\{1, 2, \dots, M\}$  に写像することで、サイズが  $M$  の一様乱数を近似する問題である。系列長  $n$  が長くなったと

き、近似誤差が与えられた値 以下であるという条件の下で得られる乱数生成レートの上限を  $M = \exp(nR + o(n))$  と書いたとき、 $o(n)$  の最大次数の項 ( $n^{1/2}$  の項) の係数が 2 次の乱数生成レートである。この 2 次のレートがスムーズ Renyi エントロピーを用いて表せることを明らかにする。

- (4) 2つの情報源を独立に符号化して復号器に送り、復号器では片方の情報源の系列のみを復元する Wyner 符号化問題について検討し、符号化する系列の長さが長くなったとき誤り率が指定された値 以下に収束するために、2つの符号器の符号化レート対の満足すべき領域をスムーズ Renyi エントロピーとスムーズ Renyi ダイバージェンスを用いて明らかにする。
- (5) Wyner-Ziv 符号化とは、2つの相関を有する情報源のうち、一方の情報源からの出力を符号化して復号器に送り、他方の情報源からの出力を復号器の副情報源とみなして復号を行う歪みを許した符号化法である。相関を有する情報源に対する Wyner-Ziv 符号化問題について検討し、符号化する系列の長さが長くなったときに歪みが許容値を超える確率が零に収束するという条件の下で、歪みの許容値が与えられたとき符号器の最小符号化レートの限界を情報源のスムーズ Renyi エントロピーやスムーズ Renyi ダイバージェンスを用いて明らかにする。
- (6) 相関を有する2つの情報源からの出力列に各々独立な乱数生成器を用いることで、互いに独立な乱数を生成するという多端子 intrinsic randomness 問題について検討し、出力列長が長くなったときに、互いに独立な一様乱数が生成できる乱数生成レート対の領域を明らかにする。
- (7) 複数の送信者が互いに独立にメッセージを符号化して同時に通信路に送信し、受信者は通信路の出力列から両方の送信メッセージを復号するマルチアクセス通信について、符号化を長くすることで、指定された復号誤り率 以下で通信が行えるために伝送レート対が満足すべき領域を明らかにする。

#### 4. 研究成果

研究の方法に記載した7つの問題について検討を行い、次の成果を得た。

- (1) Slepian-Wolf 符号化問題については、指定された誤り率 に対して2つの符号器の符号化レート対の満足すべき領域を明らかにし、この領域の内界と外界がスムーズ Renyi エントロピーを用いて表せることを示した。また、誤り率が零に収束するとき、得られ得た内

界と外界が一致することを示した。また、符号長が有限のときの内界と外界は、情報スペクトルを用いて得られたものよりも厳しくなっている。

- (2) 最大歪みや平均ひずみ制約のある固定長符号化におけるレートひずみ関数をスムーズ Renyi ダイバージェンスによって統一的に導出した。また、導出の過程において、有歪み符号化以外にも利用可能な、符号化逆定理を証明する際に有用なスムーズ Renyi ダイバージェンスを用いた新たな不等式を得た。
- (3) Intrinsic randomness 問題については、2次のレートがスムーズ Renyi エントロピーを用いて表せることを明らかにすると共に、誤り率や乱数生成レートの系列長  $n$  に対する極限の取り方を変えても、統一的に2次のレートが導出できる方法を確立した。
- (4) Wyner 符号化については、(2)で得られた新たな不等式を利用することで、誤り率 を指定したとき、2つの符号器の符号化レート対の満足すべき領域をスムーズ Renyi エントロピーとスムーズ Renyi ダイバージェンスを用いて明らかにした。
- (5) Wyner-Ziv 符号化については、歪みの許容値が定められたとき、符号器の最小符号化レートの限界を情報源のスムーズ Renyi エントロピーとスムーズ Renyi ダイバージェンスによって表現できることを明らかにした。
- (6) 多端子 intrinsic randomness 問題については、生成できる乱数生成レート対の領域をスムーズ Renyi エントロピーによって明らかにした。しかしながら、本質的に同等な成果が1年前の2014年に Yang によって情報スペクトルを用いて得られていることが判明した。このため、ここで得られた研究成果は、スムーズ Renyi エントロピーを用いたという点を除いて、新たな成果ではなかった。
- (7) マルチアクセス通信路の符号化については、復号誤り率 以下で通信が行えるために伝送レート対が満足すべき領域を明らかにすると共に、この領域の内界と外界がスムーズ Renyi ダイバージェンスを用いて表せることを示した。また、誤り率が零に収束するとき、得られ得た内界と外界が一致することを示した。この成果は(1)で述べた Slepian-Wolf 符号化の双対の符号化問題であり、符号長が有限のときの内界と外界は、情報スペクトルを用いて得られるものよりも厳しくなっている。尚、ここで得られた符号化逆定理の証明手法を従来の1入力1出力の通信路符号化問題に適用すると、2009年の Renner らの証明と異なり、信号処理不

等式を経由せずに直接に符号化逆定理が証明できる。この意味で、見通しのよい証明法を確立したと言える。

以上の成果と研究開始前の成果をまとめると、次の問題に対して新たな再定式化が行えたことになる。

- (1) 一般情報源の固定長符号化問題
- (2) 一般情報源の歪みを許容した符号化問題
- (3) 誤り率 を許容した一般情報源の Slepian-Wolf 符号化問題
- (4) 誤り率 を許容した一般情報源の Wyner 符号化問題
- (5) 誤り率 を許容した一般情報源の Wyner-Ziv 符号化問題
- (6) 一般情報源の resolvability 問題と 2 次の乱数生成レート
- (7) 一般情報源の intrinsic randomness 問題と 2 次の乱数生成レート
- (8) 相関を有する複数の一般情報源の intrinsic randomness 問題
- (9) 復号誤り率 を許容したマルチアクセス一般通信路の符号化問題

今後の展望としては、仮説検定問題、通信路の resolvability 問題、乱数共有問題などを再定式化することが挙げられる。

#### 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

〔雑誌論文〕(計0件)

〔学会発表〕(計10件)

Tomohiko Uyematsu and Tetsunao Matuta, Revisiting the Slepian-Wolf coding problem for general sources: a direct approach, 2014 IEEE Inter. Symp. on Inform. Theory, 査読有, 2014.7.1, Honolulu (U.S.A.)

DOI: 10.1109/ISIT.2014.6875050

Tomohiko Uyematsu and Tetsunao Matuta, Revisiting the rate distortion theory using smooth max Renyi divergence, 電子情報通信学会 情報理論研究会, 2014.9.19, 鳩山荘(千葉県・館山市)

Tomohiko Uyematsu and Tetsunao Matuta, Revisiting the rate distortion theory using smooth max Renyi divergence, 2014 IEEE Inform. Theory Workshop, 査読有, 2014.11.3, Hobart (Australia)

DOI: 10.1109/ITW.2014.6970821

Tomohiko Uyematsu and Tetsunao Matuta, Revisiting Wyner source coding system: a direct approach, 第37回情報理論とその応用シンポジウム, 2014.12.10, 宇奈月ニューオータニホテル(富山県・黒部市) 行川英一、植松友彦、Intrinsic randomness 問題における 2 次の漸近レートの smooth Renyi エントロピーによる表現

について、電子情報通信学会 情報理論研究会、2015.1.30、東京大学フューチャーセンター(千葉県・柏市)

Tomohiko Uyematsu and Tetsunao Matuta, Source coding with side information at the decoder revisited, Trans. on 2015 IEEE Inter. Symp. on Inform. Theory, 査読有, 2015.6.17, Hong Kong (Republic of China)

DOI: 10.1109/ISIT.2015.7282720

植松友彦、[招待講演]新たな情報量による情報理論の再定式化、電子情報通信学会 情報理論研究会、2015.7.13、東京工業大学(東京都・目黒区)

Tomohiko Uyematsu and Tetsunao Matuta, Revisiting Wyner-Ziv source coding problem using smooth min and max Renyi divergence, 第38回情報理論とその応用シンポジウム, 2015.11.25, 下電ホテル(岡山県・倉敷市)

Tomohiko Uyematsu and Tetsunao Matuta, Intrinsic randomness problem for correlated general sources, 電子情報通信学会情報理論研究会, 2016.3.10, 電気通信大学(東京都・調布市)

Tomohiko Uyematsu and Tetsunao Matuta, Simple proof of coding theorem for multiple-access channels, 第39回情報理論とその応用シンポジウム予稿集, 2016.12.16, 高山グリーンホテル(岐阜県・高山市)

#### 6. 研究組織

(1)研究代表者

植松 友彦 (UYEMATSU Tomohiko)  
東京工業大学・工学院・教授  
研究者番号: 60168656

(2)研究分担者

松田 哲直 (MATSUTA Tetsunao)  
東京工業大学・工学院・助教  
研究者番号: 00638984