様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９－１、Ｚ－１９　（共通）

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 ２９ 年　 ６ 月 ２２ 日現在

機関番号： ５５５０１
研究種目： 挑戦的萌芽研究
研究期間： 2014～2016
課題番号： ２６６１００１０

研究課題名（和文）ボット周期性を用いた混合モチーフおよび混合テイトモチーフの無限圏の構成

研究課題名（英文）Construction of the infinity-categories of mixed motives and mixed Tate motives by using the Bott periodicity

研究代表者

加藤　裕基（Kato, Yuki）

宇部工業高等専門学校・一般科・講師

研究者番号：５０７０７１３０

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　1,400,000円

研究成果の概要（和文）：一般の左固有組み合わせ的かつ単体的なモデル圏についてモティヴィック導来代数幾何学の理論を定式化した．それらを応用して無限圏を用いてモティヴィック・スキームおよびスタックを構成する理論を与えた．例えばモティヴィックスキームのベクトル束やThom空間を表現するモティヴィック・スタックを無限圏を用いて構成することができる．これらはモティヴィック導来代数幾何学がモジュライ問題に応用できる可能性があることを示している．研究は論文「Motivic model categories and motivic derived algebraic geometry」にまとめた．

研究成果の概要（英文）：We established the theory of motivic derived algebraic geometry for left proper combinatorial simlicial model categories. In the framework of motivic derived algebraic geometry, we can construct of the motivic version of derived schemes and stacks by using motivic versions of infinity-categories. For example, we can obtain the moduli stacks of vector bundles and Thom spaces on motivic schemes. These results give us examples of applications of motivic derived algebraic geometry to moduli problems. We wrote the research the article "Motivic model categories and motivic derived algebraic geometry".

研究分野： 代数学

キーワード： 数論幾何学　モデル圏　代数的K-理論　A1ホモトピー論

１．研究開始当初の背景

2000 年までに混合モチーフの三角圏は Voevodsky，Levine，花村の三人により独立に構成されている．一方で 2000 年以降，Lurie 等によって導入されて発展した導来代数幾何学によりモチーフ理論の研究も新たな方向性が確立されてきた．2007 年に Tabuada により K-理論の普遍性を与える非可換モチーフのなす無限圏が構成された．

また，位相的保型形式の構成に代表されるように導来代数幾何学が位相幾何学のホモトピー論および安定ホモトピー論に対して応用されている．Morel および Voevodsky の導入した $\mathbf{A}^1$-ホモトピー論は位相幾何学のホモトピー論の代数的類似と考えることができる．そこで導来代数幾何学と A^1-ホモトピー論を組み合わせた「モティヴィック導来代数幾何学」を考えて，導来代数幾何学を応用できるように強化を行うことで A^1-ホモトピー論に応用できる枠組みを作る研究を行うことにした．申請者はモティヴィック導来代数幾何学の枠組みから代数的 K-理論の研究を行って K-群を表現するスペクトラムがボット周期元の対数微分形式と関係づけられると考えた．

２．研究の目的

(1)モティヴィック導来代数幾何学の理論の定式化

Grothendieck により代数幾何学は集合の圏を用いて層の理論を展開することで発展してきた．他方，位相幾何学において Quillen は 1967 年にホモトピー論を展開するための本質的な枠組みであるモデル圏の理論を構成し，単体的集合の圏と位相空間の圏のもつ標準的なモデル構造が Quillen 同値であることを証明した．2006 年頃に Lurie 等によって，代数幾何学とホモトピー論を組み合わせた理論として導来代数幾何学が確立された．導来代数幾何学は集合の圏を単体的集合のモデル圏の上に層の理論を代数幾何学である．言い換えると，あ集合の圏から，単体的集合の圏(あるいは位相空間の圏) に取り替えて代数幾何学の類似を展開させる理論である．この研究の目的は 1 点上の層の圏を集合の圏から一般のモデル圏に取り替えて，様々なモデル圏の上に代数幾何学の理論を展開する仕組みおよびその応用を与えることである．

(2)ボット周期性の対数微分形式を導来代数幾何学の視点からの研究

これまでのモチーフ理論はすべて代数的サイクルを用いて構成されてきた．本研究ではは代数的サイクルよりもボット周期性こそがモチーフ理論に対して重要な要素ではないかと考えている．ボット周期性から，混合モチーフおよび混合テイトモチーフの満たすべき性質をどれだけ引き出すことができるかを調べる点がこれまでにない斬新な視点と言える．特にボット周期の対数微分形式からアダムス作用素の固有分解や混合モチーフの重みフィルターが導かれることが期待される．そして，本研究は代数多様体よりもはるかに広い範囲の対象を扱う非可換モチーフ圏から出発して，混合モチーフの圏を構成する研究である．本研究は非可換モチーフの圏から混合モチーフの圏を構成しているので，非可換環を座標環に持つ代数多様体のモチヴィックコホモロジーの定式化など非可換代数幾何学へのモチーフ理論の発展などが期待される．

３．研究の方法

(1)モティヴィック導来代数幾何学の理論の定式化

左固有組み合わせ的モデル圏上の単体的前層の上に導来代数幾何学の類似の理論を展開させる．このとき無限亜群，無限圏，無限 2 圏，無限トポスのモティヴィック類似の定

式化と無限幾何的トポスの理論を定式化して，ザリスキトポスとエタールトポスのモティヴィック類似の定式化を行う．
(2)ボット周期性の対数微分形式を導来代数幾何学の視点からの研究
(1)で定式化した導来代数幾何学に基づいてK-スペクトラムをアファインスキームの座標環として考える．得られたアファインモティヴィックスキームの自由ループスタックがボット周期の対数微分形式と関係づけることを調べる．ボット周期の対数微分形式を使って，K-スペクトラムのなすアファインモティヴィックスキームに乗法群 $\mathbf{G}_m$ の作用を与える．

４．研究成果
(1)モティヴィック導来代数幾何学の理論の定式化
研究当初は $\mathbf{A}^1$-ホモトピー論と導来代数幾何学の組み合わせのみを念頭においてモティヴィック導来代数幾何学の理論を構築することを考えていた．研究を進めるにあたって応用できる範囲を広げるように助言を頂いた．一般的な Grothendieck サイトで区間のデータを持つような圏から左固有組み合わせ的かつ単体的モデル圏への前層全体のなす圏に，Morel および Voevodsky がモデル構造を導入したものと同様の方法で新たなモデル構造を導入することを考えて定式化を行った．これをモティヴィック・モデル圏と呼ぶことにした．このとき使用するモデル圏を取り換えることで，モティヴィック無限空間，モティヴィック無限圏，モティヴィック無限2圏のなすモティヴィック・モデル圏が定義できるように定式化を行った．
左固有組み合わせ的モデル圏から作られる脈体は自然に表示可能無限圏の構造を持つことが知られている．定式化されたモティヴィック・モデル圏から作られる脈体は左固有組み合わせ的かつ単体的モデル圏の脈体のなす無限圏とモティヴィック無限空間の無限圏のテンソル積であることによって特徴づけられることを証明した．
定式化されたモティヴィック・モデル圏の理論を用いてモティヴィック代数幾何学の理論の定式化の研究を行った．Lurie 等の導入した導来代数幾何学の無限トポスや幾何的無限トポスおよび導来スキームおよび導来スタックの理論のモティヴィック類似の理論を構成した．その際，無限2圏の理論を用いて代数幾何学におけるスペクトラム関手の存在を証明した．
また，モティヴィック導来代数幾何学と $\mathbf{A}^1$-ホモトピー論に対する応用の研究も行った．モティヴィック無限圏に対する $\mathbf{A}^1$-ホモトピー論の展開させる方法が示されたと考えられる．特に，代数的コボルディズムの研究への展開が期待される．モティヴィック導来代数幾何学の理論の定式化は完了している．今後はモティヴィック代数幾何学をさらに応用させる研究が考えられる．

(2)ボット周期性の対数微分形式を導来代数幾何学の視点からの研究
モティヴィック導来代数幾何学に基づいて K-スペクトラムをアファインスキームの座標環に起点付き射影直線上のループスタックの研究を行った．得られたループスタックの座標環がボット周期の対数微分形式で生成されることがわかった．モティヴィック導来代数幾何学の研究が当初の計画とは別方向に発展をしているため，K-スペクトラムのボット周期性に絞ったところまでの研究を進めるところが今後の課題となる．

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）
〔学会発表〕（計５件）
1. Y.Kato, Motivic derived algebraic

geometry and periodic motivic E_∞-rings , International Category Theory Conference CT 2016 (Dalhousie University / St. Mary's University, Halifax, Canada), August, 11, 2016

2. Y.Kato, Motivic model categories and motivic derived algebraic geometry, 第22回代数学若手研究集会(岡山大学), 2017年3月6日
3. Y.Kato, Loop stacks of the affine motivic stack of K-theory, 日本数学会2016年度年会代数学分科会(筑波大学) 2016年3月17日

〔その他〕

1． Y.Kato, Motivic model categories and motivic derived algebraic geometry, preprint,
http://arxiv.org/abs/1703.02849

６．研究組織

(1)研究代表者

加藤　裕基（YUKI KATO）
独立行政法人　国立高等専門学校機構
宇部工業高等専門学校　一般科・講師
研究者番号：50707130