

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 29 年 6 月 3 日現在

機関番号：12601

研究種目：挑戦的萌芽研究

研究期間：2014～2016

課題番号：26610019

研究課題名(和文) Kardar-Parisi-Zhang 方程式の確率解析的研究

研究課題名(英文) Stochastic analytic study on Kardar-Parisi-Zhang equation

研究代表者

舟木 直久 (Funaki, Tadahisa)

東京大学・大学院数理科学研究科・教授

研究者番号：60112174

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 2,600,000円

研究成果の概要(和文)：Kardar-Parisi-Zhang(KPZ)方程式とは、揺動を伴う界面の成長を記述する非線形確率偏微分方程式である。数学的には発散項を含み不良設定になるが、これを除去する繰り込みの手法がフィールズ賞受賞者Hairerにより提唱され意味付けが可能となった。本研究では、KPZ方程式および多成分がカップルしたKPZ方程式の定常測度を特定し、方程式の時間大域的可解性を示した。さらに、関連する相互作用無限粒子系の行列式構造を新たに見出すなどの研究を行った。

研究成果の概要(英文)：Kardar-Parisi-Zhang (KPZ) equation is a nonlinear stochastic partial differential equation which describes an evolution of growing interfaces with fluctuation. Mathematically, this equation involves a divergent term so that it is ill-posed, but Hairer, a Fields medalist, introduced a method of renormalization which removes the divergent term and gave a mathematical meaning to it. In this research project, we have specified the stationary measures of KPZ equation and multicomponent coupled KPZ equation, and shown the global solvability in time. Moreover, we have found new determinantal structures in related interacting infinite particle systems.

研究分野：確率論

キーワード：確率論 解析学 統計力学 数理物理 関数方程式論

1. 研究開始当初の背景

揺動を伴う界面の成長を記述する Kardar-Parisi-Zhang (KPZ) 方程式の研究は近年爆発的に進展しており、確率論研究の中心的課題の一つと考えられるに至った。KPZ 方程式自体は不良設定 (ill-posed) であるが、繰り込みの手法により意味付け可能で(2014年フィールズ賞受賞者 Hairer の研究)、それは粒子系からの近似により導出される解、つまり乗法的ノイズを持つ確率熱方程式から定まる Cole-Hopf 解と一致することが知られるようになった。笹本-Spohn らにより、いくつかの特殊な初期条件の下で、解の生成関数の行列式構造(determinantal structure)が見いだされ、それを用いて KPZ 方程式の Cole-Hopf 解に対して通常を中心極限定理とは全く異なる $1/3$ 乗則が示され、急速に関心が高まってきた。

2. 研究の目的

KPZ 方程式は、Hamilton-Jacobi 型の非線形確率偏微分方程式である。この方程式には、界面の高さ関数の空間微分(界面の傾き)の 2 乗を含む非線形項と時空ホワイトノイズとよばれる確率項(揺動項)が現れるが、両者は協調せず、そのままでは意味のある解を持ち得ない。しかし、界面の傾きに対する確率 Burgers 方程式とみなし、無限大の発散項を取り除いて得られる Cole-Hopf 解は意味を持つ。このような意味の解に対する確率可積分系の理論の観点からの研究が世界的規模で進みつつある。本研究の目的は、さらに汎用性の高い確率解析的手法を持ち込み、平衡系、非平衡系、多成分がカップルした系、多粒子系による近似等の観点から KPZ 方程式の研究を推進することにある。

3. 研究の方法

(1) 本研究は KPZ 方程式に特化したものであり、主に研究代表者・舟木が担当した確率解析的手法と研究分担者・笹本が担当した確率可積分系による手法の両面から研究を進めた。同時に、両者間の緊密な連携を図った。関連する確率偏微分方程式の研究も行った。(2) 研究期間の初年度に海外共同研究者の 1 人である Hendrik Weber 氏(英国・Warwick 大学)を招き、KPZ 方程式を含む特異な確率偏微分方程式に対する繰り込みの手法をテーマとする「確率論夏の学校」を開催した。また、研究集会「Stochastic Analysis on Large Scale Interacting Systems」を毎年開催し、KPZ 方程式に関する研究発表等を行った。

4. 研究成果

(1) Cole-Hopf 解について、ウィナー測度が定常測度であることを示した。さらに、幾何的ブラウン運動の分布が乗法的ノイズを持つ線形確率熱方程式の定常測度であることを Cole-Hopf 変換を通して示した⑨、⑩(番

号は[雑誌論文]参照。以下、同様)。

(2) 多成分がカップルした KPZ 方程式に対し、擬被制御解析を用いて(1)の結果の拡張を行った。特に、非線形項のカップリング定数が 3 重線形性とよばれる対称性の条件を満たせば、拡散係数による修正を加えた多次元ウィナー測度が定常測度であり、この測度についてほとんどすべての初期値に対し KPZ 方程式(正確には対応する傾きの方程式)は大域的適切性を持つことを示した⑪。

(3) q-TASEP とよばれる排他過程の一般化として、粒子の移動確率に q-Hahn 直交多項式の重み関数が現れる過程を導入し、その性質を議論した⑬、⑭、⑮。また非対称な反射型相互作用を持つブラウン運動粒子系に対し、双対性を用いることにより、カレントの母関数がフレドホルム行列式の形に書けることを見出した⑯。

(4) 量子群に関連する代数的構造を用いることにより、自己双対性を持つ非対称多体拡散モデルを構成した⑤、⑦。これは適切な極限において KMP モデルとして知られる熱輸送模型の非対称版も含んでいる。また、0' Connell-Yor モデルとよばれる有限温度ポリマー模型に対し、ランダム行列理論に現れるのと同様な行列式構造があることを見出した④、⑥。

(5) q-TASEP とよばれる非対称単純排他過程の一種に対し、その定常状態における粒子の位置の揺らぎが長時間極限において Baik-Rains 分布で与えられることを示した。また、そのスケール極限として定常的なポリマー模型や KPZ 方程式の解析を行った。さらに対称単純排他過程における粒子の位置の大偏差を決定する研究も行った③。

(6) 関連して、質量保存アレン・カーン方程式にノイズを加えて得られる確率偏微分方程式について、鋭敏界面極限を論じ、極限で確率的摂動を持つ質量保存平均曲率運動が導かれることを示した。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 18 件)

- ① Tadahisa Funaki and Masato Hoshino, A coupled KPZ equation, its two types of approximations and existence of global solutions, *J. Funct. Anal.*, **273** (2017), 1165-1204 [査読有]
DOI: 10.1016/j.jfa.2017.05.002
- ② Joe Yuichiro Wakano, Tadahisa Funaki and Satoshi Yokoyama, Derivation of replicator-mutator equations from a model in population genetics, *Japan J. Indust. Appl. Math.*, 掲載確定 [査読有]
DOI: 10.1007/s13160-017-0249-9
- ③ Takashi Imamura, Kirone Mallick and

- Tomohiro Sasamoto, Large deviations of a tracer in the symmetric exclusion process, *Phys. Rev. Lett.*, **118** (2017), 160601 [査読有]
DOI: 10.1103/PhysRevLett.118.160601
- ④ Takashi Imamura and Tomohiro Sasamoto, Free energy distribution of the stationary O'Connell-Yor directed random polymer model, *J. Phys. A*, 2017 [査読有]
DOI: 10.1088/1751-8121/aa6e17
- ⑤ Gioia Carinci, Cristiana Giardinà, Frank Redig and Tomohiro Sasamoto, A generalized asymmetric exclusion process with $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ stochastic duality, *Probab. Theory Related. Fields*, **166** (2016), 887-933 [査読有]
DOI: 10.1007/s00440-015-0674-0
- ⑥ Takashi Imamura and Tomohiro Sasamoto, Determinantal structures in the O'Connell-Yor directed random polymer model, *J. Stat. Phys.*, **163** (2016), 675-713 [査読有]
DOI: 10.1007/s10955-016-1492-1
- ⑦ Gioia Carinci, Cristiana Giardinà, Frank Redig and Tomohiro Sasamoto, Asymmetric stochastic transport models with $U_q(\mathfrak{su}(1,1))$ symmetry, *J. Stat. Phys.*, **163** (2016), 239-279 [査読有] DOI: 10.1007/s10955-016-1473-4
- ⑧ Tomohiro Sasamoto, The 1D Kardar-Parisi-Zhang equation: Height distribution and universality, *Prog. Theor. Exp. Phys.*, 022A01 (2016) [査読有] DOI: 10.1093/ptep/ptw002
- ⑨ Tadahisa Funaki and Jeremy Quastel, KPZ equation, its renormalization and invariant measures, *Stoch. PDE, Anal. Comp.*, **3** (2015), 159-220 [査読有]
DOI: 10.1007/s40072-015-0046-x
- ⑩ Tadahisa Funaki, Infinitesimal invariance for the coupled KPZ equations, *Memoriaire Marc Yor - S'eminaires de Probabilit'es XLVII, Lect. Notes Math.*, **2137**, Springer (2015), 37-47 [査読有] DOI: 10.1007/978-3-319-18585-9_3
- ⑪ Erwin Bolthausen, Taizo Chiyonobu and Tadahisa Funaki, Scaling limits for weakly pinned Gaussian random fields under the presence of two possible candidates, *J. Math. Soc. Japan*, **67** (2015), 1359-1412 [査読有]
DOI: 10.2969/jmsj/
- ⑫ Tadahisa Funaki, Masashi Ohnawa, Yukihito Suzuki and Satoshi Yokoyama, Existence and uniqueness of solutions to stochastic Rayleigh-Plesset equations, *J. Math. Anal. Appl.*, **425** (2015), 20-32 [査読有]
DOI: 10.1016/j.jmaa.2014.12.018
- ⑬ Alexei Borodin, Ivan Corwin, Leonid Petrov and Tomohiro Sasamoto, Spectral theory for the q -Boson particle system, *Compos. Math.*, **151** (2015), 1-67 [査読有]
DOI: 10.1112/S0010437X14007532
- ⑭ Alexei Borodin, Ivan Corwin, Leonid Petrov and Tomohiro Sasamoto, Spectral theory for interacting particle systems solvable by coordinate Bethe ansatz, *Comm. Math. Phys.*, **339** (2015), 1167-1245 [査読有]
DOI: 10.1007/s00220-015-2424-7
- ⑮ Tomohiro Sasamoto and Herbert Spohn, Point-interacting Brownian motions in the KPZ universality class, *Electron. J. Probab.*, **20** (2015), 1-28 [査読有]
DOI: 10.1214/EJP.v20-3926
- ⑯ Tomohiro Sasamoto and Lauren Williams, Combinatorics of the asymmetric exclusion process on a semi-infinite lattice, *J. Comb.*, **5** (2014), 419-434 [査読有]
DOI: 10.4310/JOC.2014.v5.n4.a1
- ⑰ Tadahisa Funaki, Equivalence of ensembles under inhomogeneous conditioning and its applications to random Young diagrams, *J. Stat. Phys.*, **154** (2014), 588-609 [査読有]
DOI: 10.1007/s10955-013-0841-6
- ⑱ Alexei Borodin, Ivan Corwin and Tomohiro Sasamoto, From duality to determinants for q -TASEP and ASEP, *Ann. Probab.*, **42** (2014) 2341-2382 [査読有] DOI: 10.1214/13-AOP868
- [学会発表] (計46件)
- ① 笹本智弘, KPZ 方程式と可積分確率相互作用系, 日本数学会 2017 年度年会[日本数学会解析学賞受賞特別講演], 2017 年 3 月 24 日, 首都大学東京 (東京都・八王子市)
- ② 舟木直久, KPP, KPZ and nonlinear fluctuations in stochastic dynamics, Reaction-Diffusion System, Theory and Applications, 2017 年 3 月 19 日, 明治大学 (東京都・千代田区)
- ③ 舟木直久, KPZ, nonlinear fluctuations in 2D stochastic dynamics, TU Probability Seminar, 2017 年 3 月 3 日, Berlin (ドイツ)
- ④ 舟木直久, KPZ, nonlinear fluctuations in Glauber-Kawasaki dynamics, Stochastic Analysis Day, 2017 年 2 月 27 日, Pisa (イタリア)
- ⑤ 笹本智弘, Exact solutions of 1D KPZ equation and related models, Australian and New Zealand Association of Mathematical Physics, 2017 年 2 月 2 日, Kiama (オーストラリア)

- ⑥ 舟木直久, KPZ, nonlinear fluctuations in Glauber-Kawasaki dynamics, Kickoff Meeting for Stochastic Analysis on Infinite Particle Systems, 2017年1月24日, 九州大学(福岡県・福岡市)
- ⑦ 舟木直久, 確率偏微分方程式, 特に KPZ 方程式について, 第6回弘前非線形方程式研究会, 2016年12月23日, 弘前大学(青森県・弘前市)
- ⑧ 笹本智弘, Large deviation of a tagged particle in 1D symmetric exclusion process, Dynamics Days Asia Pacific 9, 2016年12月17日, Hong Kong (中国)
- ⑨ 舟木直久, 確率偏微分方程式, 特に KPZ 方程式について, 早稲田大学「応用解析」研究会, 2016年11月26日, 早稲田大学(東京都・新宿区)
- ⑩ 舟木直久, Coupled KPZ equation, Large Scale Stochastic Dynamics, 2016年11月14日, Oberwolfach (ドイツ)
- ⑪ 舟木直久, Sharp interface limit for a stochastically perturbed mass conserving Allen-Cahn equation, International Workshop on the Multi-Phase Flow: Analysis, Modeling and Numerics, 2016年11月9日, 早稲田大学(東京都・新宿区)
- ⑫ 笹本智弘, An analysis of q-TASEP with a random initial condition, Stochastic Analysis on Large Scale Interacting Systems, 2016年11月2日, 東京大学(東京都・目黒区)
- ⑬ 舟木直久, Sharp interface limit for a stochastically perturbed mass conserving Allen-Cahn equation, Stochastic Partial Differential Equations and Related Fields, 2016年10月13日, Bielefeld (ドイツ)
- ⑭ 舟木直久, Sharp interface limit for stochastic Allen-Cahn equation, ReadDiNet 2016: Reaction-Diffusion Systems in Mathematics and Biomedicine, 2016年9月20日, Frejus (フランス)
- ⑮ 舟木直久, A coupled KPZ equation, Workshop on Stochastic Processes in honour of Erwin Bolthausen's 70th birthday, 2016年9月16日, Zürich (スイス)
- ⑯ 笹本智弘, Large deviation of a tagged particle for stationary 1D symmetric simple exclusion process, Non-equilibrium Dynamics in Classical and Quantum Systems: from Quenches to Slow Relaxations, 2016年7月14日, Pont-a-Mousson (フランス)
- ⑰ 舟木直久, Two approximations of coupled KPZ equations, The 4th Institute of Mathematical Statistics Asia Pacific Rim Meeting, 2016年6月29日, Hong Kong (中国)
- ⑱ 舟木直久, Coupled KPZ equation, Stochastic Partial Differential Equations and Applications - X, 2016年6月2日, Levico (イタリア)
- ⑲ 舟木直久, Coupled KPZ equation and its two types of approximations, Probabilistic Models - from Discrete to Continuous, 2016年3月29日, Coventry (英国)
- ⑳ 舟木直久, Coupled KPZ equation, パリ大学ドフイーンヌ校 Ceremade 談話会, 2016年3月15日, Paris (フランス)
- ㉑ 舟木直久, Stochastic motion by mean curvature and sharp interface limits, Stochastic PDE's, Large Scale Interacting Systems and Applications to Biology, 2016年3月10日, Orsay (フランス)
- ㉒ 笹本智弘, Determinantal structures for 1D KPZ equation and related models, Nonequilibrium: Physics, Stochastics and Dynamical Systems, 2016年1月21日, Marseille (フランス)
- ㉓ 舟木直久, Topics in stochastic partial differential equations, UK-Japan Winter School: Classic and Stochastic Geometric Mechanics, 2016年1月4日~7日, London (英国)
- ㉔ 笹本智弘, Construction of asymmetric interacting particle systems with self-duality, Current Topics in Mathematical Physics and Probability, 2015年12月29日, Sanya (中国)
- ㉕ 舟木直久, Coupled KPZ equations, Current Topics in Mathematical Physics and Probability, 2015年12月27日, Sanya (中国)
- ㉖ 舟木直久, Some Topics in Stochastic Partial Differential Equations, Kiyosi Itô's Legacy from a French-Japanese Perspective, Conference in celebration of the centennial of the birth of Kiyosi Itô, 2015年11月26日, 在日フランス大使館(東京都・港区)
- ㉗ 笹本智弘, Dualities for asymmetric interacting particle systems, Stochastic Analysis on Large Scale Interacting Systems, 2015年10月26日, 京都大学(京都府・京都市)
- ㉘ 舟木直久, 統計物理学への確率論によるアプローチ, 第20回久保記念シンポジウム「非平衡をめぐる数理」, 2015年10月3日, 学士会館(東京都・千代田区)
- ㉙ 舟木直久, Scaling limits for random fields with a pinning effect, Stochastic Analysis, 2015年9月7日, 京都大学(京都府・京都市)
- ㉚ 舟木直久, 界面運動と確率偏微分方程式, NLPDE セミナー, 2015年7月3日, 京都大学(京都府・京都市)

- ③① 舟木直久, Topics in random interfaces, 3rd NIMS Summer School in Probability, 2015年6月15日~19日, Daejeon (韓国)
- ③② 舟木直久, Scaling limits for weakly pinned Gaussian random fields under the presence of two possible candidates, Progress in Nonequilibrium Statistical Mechanics, 2015年6月9日, Nice (フランス)
- ③③ 笹本智弘, A determinantal structure for the O'Connell-Yor polymer model, Random Polymers and Algebraic Combinatorics, 2015年5月27日, Oxford (英国)
- ③④ 笹本智弘, A determinantal structure for finite temperature directed polymer, 113th Statistical Mechanics Conference, 2015年5月12日, New Jersey (米国)
- ③⑤ 舟木直久, KPZ equation and its invariant measures, Math Physics/Probability Seminar, 2015年4月1日, Tucson (米国)
- ③⑥ 舟木直久, Stochastic PDEs and random motion of fronts, Mathematics Colloquium, 2015年3月26日, Tucson (米国)
- ③⑦ 笹本智弘, Fluctuations for one-dimensional Brownian motions with oblique reflection, Interacting Particles Systems and Non-equilibrium Dynamics, 2015年3月10日, Paris (フランス)
- ③⑧ 舟木直久, Mathematical approach connecting the microscopic with the macroscopic, AIMR International Symposium: A New Horizon for Materials Science with Mathematics Collaboration, 2015年2月16日, 仙台国際センター (宮城県・仙台市)
- ③⑨ 舟木直久, Choosing a proper minimizer of a certain variational problem from microscopic viewpoint, International Conference on Mathematical Fluid Dynamics, Present and Future, 2014年11月12日, 早稲田大学 (東京都・新宿区)
- ④⑩ 笹本智弘, The q -Hahn zero range process and TASEP, Stochastic Analysis on Large Scale Interacting Systems, 2014年11月6日, 東京大学 (東京都・目黒区)
- ④⑪ 舟木直久, KPZ equation, its renormalization and invariant measures, Interface Fluctuations and KPZ Universality Class, 2014年8月22日, 京都大学 (京都府・京都市)
- ④⑫ 笹本智弘, The one-dimensional KPZ equation and its universality, 37th Conference on Stochastic Processes and Their Applications, 2014年7月28日, Buenos Aires (アルゼンチン)
- ④⑬ 笹本智弘, Fluctuations for 1D KPZ equation and Related Models, School on

Non-linear Dynamics, Dynamical Transitions and Instabilities in Classical and Quantum Systems, 2014年7月, Trieste (イタリア)

- ④⑭ 舟木直久, To choose a proper minimizer of variational problem derived from microscopic system, Miniworkshop on Mathematical Biology, 2014年6月6日, Orsay (フランス)
- ④⑮ 舟木直久, Sharp interface limit for mass conserving Allen-Cahn equation with stochastic term, Mathematics and its Applications to Complex Phenomena Arising in Biology, Chemistry and Medicine, 2014年6月4日, Marseille (フランス)
- ④⑯ 笹本智弘, The one-dimensional KPZ equation: recent progress and beyond, Nonequilibrium Problems in Physics and Mathematics, 2014年6月, Ascona (スイス)

[図書] (計4件)

- ① Tadahisa Funaki, Lectures on Random Interfaces, SpringerBriefs in Probability and Mathematical Statistics, Springer, 2016, xii+138 pages. ISBN: 978-981-10-0848-1 DOI: 10.1007/978-981-10-0849-8
- ② 舟木直久, 数学の現在 e (斎藤毅・河東泰之・小林俊行編), 東京大学出版会, 2016年, 272 ページ: 「第14講: 確率解析 --- 確率(偏)微分方程式, 伊藤からハイラーへ」 227-243 ページ担当 ISBN: 978-4-13-065313-8
- ③ 舟木直久 監訳, 乙部巖己 訳, ルベーク積分入門 (テレンス・タオ著), 朝倉書店, 2016年, 264 ページ ISBN: 978-4-254-11147-7
- ④ 舟木直久, 朝倉・数学辞典 (川又雄二郎・坪井俊・楠岡成雄・新井仁之編), 朝倉書店, 2016年, 776 ページ: 「ボルツマン方程式」担当 ISBN: 978-4-254-11125-5

6. 研究組織

(1) 研究代表者

舟木 直久 (FUNAKI TADAHISA)
東京大学・大学院数理科学研究科・教授
研究者番号: 60112174

(2) 研究分担者

笹本 智弘 (SASAMOTO Tomohiro)
東京工業大学・大学院理工学研究科・准教授
研究者番号: 70332640

(3) 連携研究者

俣野 博 (MATANO HIROSHI)
東京大学・大学院数理科学研究科・教授
研究者番号: 40126165

佐々田 槇子 (SASADA Makiko)
東京大学・大学院数理科学研究科・准教授
研究者番号：00609042
長田 博文 (OSADA HIROFUMI)
九州大学・大学院数理学研究院・教授
研究者番号：20177207
熊谷 隆 (KUMAGAI Takashi)
京都大学数理解析研究所・教授
研究者番号：90234509
乙部 巖己 (OTOBE YOSHIKI)
信州大学・理学部・准教授
研究者番号：30334882
謝 賓 (XIE BIN)
信州大学・理学部・准教授
研究者番号：50510038

(4) 研究協力者 (海外共同研究者)

Herbert SPOHN
ドイツ・ミュンヘン工科大学・名誉教授
Jeremy QUASTEL
カナダ・トロント大学・教授
Hendrik WEBER
英国・ウォーリック大学・講師