

令和元年6月20日現在

機関番号：12601

研究種目：若手研究(A)

研究期間：2014～2018

課題番号：26707002

研究課題名(和文)代数幾何学における正標数還元手法の研究

研究課題名(英文) Study of the reduction modulo positive characteristics in algebraic geometry

研究代表者

権業 善範 (Gongyo, Yoshinori)

東京大学・大学院数理科学研究科・准教授

研究者番号：70634210

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 11,100,000円

研究成果の概要(和文)：正標数還元手法の研究として、主にファノ型多様体、カラビ・ヤウ型多様体、大域的F正則多様体、および大域的F分裂多様体の研究を行った。前者の二つは極小モデル理論における基本ピースに現れる多様体で、後者の二つは正標数の基礎体上で定義されるフロベニウス写像によって定義される多様体である。この前者と後者は正標数還元により行き来することが予想されている。この研究費での研究期間中の主要な成果はこの予想に関する部分的解決と後者の多様体たちに対する正標数上の極小モデル理論的な観点からの研究である。

研究成果の学術的意義や社会的意義

正標数還元手法は、標数0の代数幾何学において、非常に有効な技術として認識されており、解析的手法とならんで、その手法の応用は非常にインパクトがある。正標数上の極小モデル理論の研究は標数0上の研究の延長としても非常に重要な研究であり、最近F特異点の研究が正標数上の極小モデル理論の研究に応用されていることから踏まえても、本研究の学術的意味は非常にあったといえる。また正標数上の代数幾何学の社会への応用としては暗号理論をはじめとする様々の分野ですでに確立されているので、本研究はその点における将来的な社会的貢献は十分に可能性がある。

研究成果の概要(英文)：Under the supporting of this grant, I had mainly studied about varieties of Fano and Calabi-Yau type, and globally F-regular and F-split varieties. First two varieties appear in the theory of Minimal model programs, and other varieties are defined by using Frobenius maps in algebraic geometry over positive characteristics fields. Among these two categories are expected to be connected by reduction modulo positive characteristics. Mainly I studied to solve this problem partially and establish the minimal model theory in positive characteristics during the support of this grants.

研究分野：代数幾何学

キーワード：アバundance予想 ファノ型多様体 大域的F正則多様体

様式 C - 19、F - 19 - 1、Z - 19、CK - 19 (共通)

1. 研究開始当初の背景

研究開始の背景は、極小モデル理論の完成を念頭においており、それはいまま変わらない。極小モデル理論の完成は代数多様体の双有理分類論におけるビルディングブロック構造の確立を意味する。それにより、代数多様体の構造を詳しく調べることができ、その応用の可能性ははかりしれない。代数多様体とは、多項式の解として定まる集合である。

双有理分類論とは、双有理的同一視という見方の下で分類を行う理論だが、双有理同一視とは、あるザリスキー開集合上で同型なものを同一視するという見方で、関数体の同型類による同一視である。

私の研究背景は、代数多様体の分類論を研究しつつ、極小モデル理論のとりわけ重要な予想を証明することである。

この極小モデル理論は、双有理同一視の下で無駄の無いモデル(極小モデルと呼ぶ)を見つけ、極小モデルの性質を調べる理論であり、

1980年代に川又雄二郎氏、森重文氏、M. Reid氏、V. V. Shokurov氏により枠組みが完成した(極小モデルプログラムと呼ぶ)。

しかし、その理論自身の完成は未だできておらず、現在、最も重要となるのがアバダンス予想と呼ばれる予想である。アバダンス予想とは、極小モデルの標準因子が、半豊富であろうという予想である。因子 S が半豊富とは、十分割り切れる大きな正の整数 m に対して mS の完備線形系が固定点を持たないことをいう。アバダンス予想は S 次元以下の場合、藤田隆夫氏、川又雄二郎氏、宮岡洋一氏らの貢献により証明されている。私の目下の目標は S 次元の場合の解決である。

最終的に極小モデル理論(極小モデルの存在とアバダンス予想の解決)が完成したあかつきには、全ての代数多様体は双有理的に、

鞍型のような図形(一般型多様体)、平面のような図形(カラビ・ヤウ多様体)、球面のような図形(ファノ多様体)に分解される。

最近、私と藤野修氏は、対数的多重標準表現の有限性を示し、半対数的標準対に対するアバダンス予想が対数的標準対に対するそれに帰着した。一方、正標準還元手法とは、複素数体上で定義された代数多様体を有限体上の代数多様体だと思い、正標準上の多様体を持つフロベニウス射という非自明な自分自身への射を用いることで、複素数体上で定義された代数多様体の結果を得る手法である。このテクニックを利用して、森重文氏はハーツホーン予想の解決および、ファノ多様体上の有理曲線の存在を証明した。私は、ここ数年この正標準還元手法を用いて対数的ファノ多様体を研究してきた。特に大域的F正則多様体と呼ばれるフロベニウス射の分裂性定義される多様体について研究している。ここで対数的ファノ多様体の正標準還元が大域的F正則多様体であることが、大域的F正則多様体の研究の動機付けとなっている。

2. 研究の目的

当初はアバダンス予想につながる葉層構造の代数性の研究を念頭において、正標準還元の研究を始めた。Birkar氏によるBorisov-Alexeev-Borisov予想の解決など、急激な分野の発展により、徐々に時代の流れがフリップの停止問題および正標準上のMMPの研究に移るようになり、よりファノ多様体の研究や大域的F正則多様体の構造を明らかにすることになった。

またこの研究の延長として、代数多様体の非自明な偏極自己射を持つ代数多様体の構造理論の研究を始め、このような多様体が対数的カラビ・ヤウ構造を持つことを調べた。現在この研究が活発化している。

3. 研究の方法

コホモロジー理論とフロベニウス写像を用い消滅定理および単射性定理などを示した。また正標準上の曲面論と正標準還元においてのザリスキー分解の振る舞いなどを調べることにより研究した。またフロベニウス写像と非自明な偏極自己射を比較することの研究も行った。そのザリスキー分解の研究の延長上に非自明な偏極自己射を持つ射影曲面の研究があった。またアバダンス予想の研究として解析的手法を用いて松村の単射性定理の応用としてある拡張定理を示し、非消滅性を仮定した場合のアバダンス予想について肯定的な結果を得た。正標準の極小モデル理論の応用として、幾何学的手法により正標準の基礎体上で定義された対数的ファノ多様体の有理鎖連結正について調べた。さらにWittコホモロジーの有理特異点版について極小モデル理論を用いて研究した。局所大域対応の観点からF-正則曲面、非自明な偏極自己射を持つ射影曲面の研究を行った。局所大域対応というのは、大域的理論から局所理論を抽出するのに射影多様体の錐を考え、局所理論から大域理論を抽出するには極小モデル理論などの技術を用い、低い次元の射影多様体(大域的幾何構造)を抽出するという哲学の下の理論である。

4. 研究成果

高木俊輔氏との共同研究で2次元のSmith-Schwede予想を解決した(論文[4])。すなわち正標準還元の下で大域的F-正則とファノ型性が同値性、および大域的F分裂型ならば対数的カラビ・ヤウ構造をもつことを曲面の場合に証明した。中村勇哉氏と田中公氏との共同研究で標準数7以上の場合の特異点付き3次元ファノ多様体の有理点公式の確立した(論文[6])。これを示すにあたり標準数が7以上の場合に、3次元川又対数的末端特異点をもつ対数的ファノ多様体が

有理鎖連結であること(論文[2])、および3次元川又対数的末端特異点がWitt有理的であることを証明した。高木俊輔氏と共同研究で大域的F正則多様体上の消滅定理および単射性定理を発展させた(論文[7])。Paolo Cascini氏とKarl Schwede氏と共同で局所F-正則曲面が十分標数 p が大きいときKLT曲面であることを示した(論文[1])。松村慎一氏とアバundance予想に大きく関わる拡張定理を確立した(論文[3])。この論文によってアバundance予想の切断の拡張部分をルロン数が消えるような特異計量の存在性または構成に問題が帰着された。Amael Broustet氏と共同研究で非自明な偏極自己準同型をもつ多様体のカラビ・ヤウ構造についての研究結果として、曲面の場合と森ドリーム空間の場合のその問題を解決した(論文[5])。

5. 主な発表論文等

[雑誌論文](計 7 件)

1. (with Paolo Cascini and Karl Schwede) "Uniform bounds for strongly F-regular surfaces" *Trans. Am. Math. Soc.* 368, No. 8, 5547--5563 (2016).
2. (with Zhiyuan Li, Zolt Patakfalvi, Karl Schwede, Hiromu Tanaka, Hong R. Zong) "On rational connectedness of globally F-regular threefolds" *Adv. Math.* 280 (2015), 47--78
3. (with Shin-ichi Matsumura) "Versions of injectivity and extension theorems" *Ann. Sci. Éc. Norm. Supér.* (4) 50 (2017), no. 2, 479--502.
4. (with Shunsuke Takagi) "Surface of globally F-regular and F-split type" *Math. Ann.* 364 (2016), no. 3-4, 841--855.
5. (with Amael Broustet) "Remarks on log Calabi-Yau structure of varieties admitting polarized endomorphism", *Taiwanese J. Math.* 21 (2017), no. 3, 569--582.
6. (with Yusuke Nakamura and Hiromu Tanaka) "Rational points on log Fano threefolds over a finite field", to appear in *Journal of the EMS*, arXiv:1512.05003,
7. (with Shunsuke Takagi) "Kollar's injectivity theorem for globally F-regular varieties", to appear in *European Journal of Mathematics*

[学会発表](計 33 件)

1. Some Vanishing Theorem for Cohomologies on Globally F-regular Varieties, NCTS Seminar in Algebraic Geometry, National Taiwan University, Taiwan, 29th, Dec, 2017
2. On Kollar's injectivity theorem on globally F-regular varieties, SINCHON WORKSHOP ON ALGEBRAIC GEOMETRY 3 HIGHER DIMENSIONAL ALGEBRAIC VARIETIES, Yonsei, Korea, 9th, Nov, 2017
3. Globally F-regular varieties, Globally F-regular type varieties, Spring school-conference Birational geometry in positive characteristic, Laboratory of Algebraic Geometry, National Research University Higher School of Economics, Faculty of Mathematics, Moscow, April 3-7, 2017,
4. 正標数上のMMPとWitt vector cohomology, 東京電機大学談話会, 東京電気大学, 23rd Jan. 2017,
5. On log CY structure of varieties admitting non-trivial polarized endomorphism, Mini Workshop at Saitama University, 6th--7th Mar. 2017,
6. On log CY structure of varieties admitting non-trivial polarized endomorphism, Higher Dimensional Algebraic Geometry, Holomorphic Dynamics and Their Interactions, IMS, NUS, Singapore, 3rd--21st, Jan. 2017,
7. On log CY structure of varieties admitting non-trivial polarized endomorphism, Workshop on algebraic geometry, Hanga Roa, the Easter island, Chile, 18th--22nd, Dec. 2016,
8. ファノ多様体の有界性とその周辺, 都の西北, 早稲田大学, 11th--18th Nov. 2016,
9. On log CY structure of varieties admitting non-trivial polarized endomorphism, Workshop on Spherical Varieties, Tsinghua Sanya International Mathematics Forum in Sanya, 三亜, 中国, 31st Oct.--4th Nov. 2016
10. 有限体上定義されたファノ多様体の有理点, 東工大数論・幾何学セミナー, 東京工業大学, 28th Oct. 2016,
11. Rational points on log Fano 3-fold over a finite field, Higher Dimensional Algebraic Geometry and Characteristic p , CIRM, Luminy, France 12th--16nd Sep. 2016
12. 拡張定理と極小モデル理論, 代数学シンポジウム, 佐賀大学, 9th Sep. 2016,
13. 有限体上定義されたファノ多様体の有理点, 第2回山形小研究集会, 山形大学, 24--28th Aug. 2016,
14. On log CY structure of varieties admitting non-trivial polarized endomorphism, Rationality problem and selfmaps, RIMS, Kyoto, 19th--22nd Jul. 2016
15. 有限体上定義された特異点を持つファノ多様体の有理点について, 早稲田大学整数論セミナー, 早稲田大学, 10 June. 2016,
16. Rational points on log Fano 3-fold over a finite field, WORKSHOP ON BIRATIONAL GEOMETRY

- AND REDUCTION TO POSITIVE CHARACTERISTIC, Edge days, Edinburgh, UK, June 3-5, 2016,
17. A few remarks on varieties admitting non-trivial polarized endomorphisms, Tokyo-Princeton algebraic geometry conference, Princeton University, May 7-10, 2016
 18. On global structure of varieties admitting polarized endomorphism, 29th Mar. 2016, NCTS Workshop in Algebraic Geometry at CCU, National Chung Cheng University
 19. On global structure of a variety admitting polarized endomorphism", Higher dimensional algebraic geometry and around, Kobe-Kyoto, 2016, 2nd Feb. 2016, Kobe University,
 20. Rational points on log Fano three-folds over a finite field, 25th--29th Jan. 2016, Arithmetic and Algebraic Geometry 2016,
 21. Versions of injectivity and extension theorems, 2nd--5th, Dec.2015, Tokyo, Tokyo-Seoul 2015,
 22. Rational points on log Fano three-folds over a finite field, 23rd Nov. 2015, Cambridge--Tokyo mini-workshop,
 23. Rational points on log Fano three-folds over a finite field, 21st, Nov.2015, Beijing Algebraic Geometry Colloquium: third meeting,
 24. Versions of injectivity and extension theorems, 18th, Nov.2015, Colloquium at Chinese Academy of Sciences
 25. Rational points on log Fano three-folds over a finite field II, 19th--23rd, Aug.2015, Higher Dimensional Algebraic Geometry, National Taiwan University,
 26. Versions of injectivity and extension theorems, 18th Dec. 2014, Workshop on Algebraic Geometry and Representation theory in Rome: Christmas conference.
 27. Versions of injectivity and extension theorems, 3rd, Dec. 2014, Cambridge Algebraic Geometry Seminar,
 28. Versions of injectivity and extension theorems, 13th, Nov. 2014, Séminaire de géométrie algébrique, école normale supérieure, Paris,
 29. Pluricanonical representation, Extension, the abundance conjecture", 10th, Oct. 2014, The London Topology and Geometry Seminar,
 30. Versions of injectivity and extension theorems", 29th Sep.--2nd, Oct., 2014, 研究会「代数多様体とその周辺」, 琉球大学
 31. Versions of injectivity and extension theorems, 17th--19th, June, 2014, Workshop of Special Month in Ann Arbor for "Birational Geometry and singularities in zero and positive characteristics"
 32. Characterization of log Fano varieties via singularities of Cox rings: mod p reduction proof, 29th, May, 2014, Seminar of Special Month in Ann Arbor for "Birational Geometry and singularities in zero and positive characteristics"
 33. On versions of injectivity and extension theorems, Conference on Positivity, Vanishing Theorems, and Applications, Lille 1, France, 12--16, May, 2014.

[その他]

ホームページ等

<http://www.ms.u-tokyo.ac.jp/~gongyo/>

科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属されます。