様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９－１、Ｚ－１９　（共通）

科研費 KAKENHI

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 ３０ 年　 ６ 月 ２６ 日現在

機関番号：１４３０１
研究種目：若手研究(B)
研究期間：2014～2017
課題番号：２６８０００１３

研究課題名（和文）志村多様体の数論幾何と非可換類体論

研究課題名（英文）Arithmetic geometry of Shimura varieties and non-abelian class field theory

研究代表者
伊藤　哲史（Ito, Tetsushi）

京都大学・理学研究科・准教授

研究者番号：１０４５６８４０

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　2,800,000円

研究成果の概要（和文）：本研究課題の目的は，志村多様体の数論幾何の研究を行い，その非可換類体論への応用を目指すことである．この目的のために，古典群の保型表現論や，局所対称空間のコホモロジー，関数体上の大域ラングランズ対応，保型表現の周期，跡公式などに関する研究集会を開催して志村多様体周辺分野の研究を推進した．また，平面曲線に伴うガロア表現について幾何的および組み合わせ的な研究を行い，曲線の定義方程式や対称性に関する整数論的な結果を得た．フェルマー型4次曲線の4等分点へのガロア作用を具体的に計算した．直交群に伴う志村多様体の幾何的性質のK3曲面への応用の研究を行った．

研究成果の概要（英文）：The purpose of this research is to study the arithmetic geometry of Shimura varieties, and apply it to non-abelian class field theory. For this purpose, I organized several workshops on some topics including automorphic representations of classical groups, the cohomology of locally symmetric spaces, the Langlands correspondences over function fields, periods of automorphic representations, the trace formula, and promoted the study of Shimura varieties and related topics. Moreover, I investigated geometric and combinatorial aspects of Galois representations associated with plane curves, and obtained number theoretic results on the defining equations and symmetries of plane curves. I explicitly calculated the Galois action on 4-torsion points on the Fermat quartic. I investigated applications of geometric properties of orthogonal Shimura varieties to K3 surfaces.

研究分野：数論幾何学

キーワード：代数学　数論幾何学　志村多様体

１．研究開始当初の背景

近年，志村多様体の数論幾何と非可換類体論の周辺分野の研究はめざましい進展を見せている．その背景は以下の通りである．

志村多様体とは，複素数体上では有界対称領域の算術商として表される代数多様体である．志村多様体は志村データと呼ばれる代数群とある条件をみたすトーラスからの写像の組から定義されるが，レフレックス体と呼ばれる特別な代数体上のモデルを持つことが知られており，標準モデルと呼ばれる．標準モデルのエタールコホモロジーを取ることで，ガロア表現を得ることができる．一方，ある条件下では志村多様体の標準モデルをレフレックス体の局所化の整数環上で考察できることが知られており，その幾何的性質，特に非アルキメデス幾何的な性質や剰余体上の幾何的性質を理解することは，志村多様体の標準モデルから定まるガロア表現を理解する上で大切である．

一方の非可換類体論は，1920 年代に高木貞治・アルチンにより打ち立てられ，完成した類体論を，さらに深く一般化する枠組みの総称である．類体論は，代数体のアーベル拡大における素点の分解の様子をイデアル類群の言葉を用いて記述する．類体論の非可換化は整数論における最も大きな未解決問題の一つである．現代の定式化では，類体論をガロア群のアーベル化の指標とイデール類群の指標の間の対応であると解釈して，非可換化としては，ガロア表現と保型表現が対応するという形で定式化がすることが正しい対応であると考えられている（ラングランズ対応）．しかし，一般の設定ではラングランズ対応は未解決の難問であり，その定式化でさえも完全に理解されているとは言えない．

非可換類体論は，解決されているほんの一部分だけでも，極めて非自明な帰結を生むことが知られている．その一例が 1990 年代にワイルズによって解決されたフェルマーの最終定理である．ワイルズは $X^N+Y^N=Z^N$ という方程式に非自明な整数解が存在しないことを証明するために，まず，非自明解が存在すると仮定して，その解から構成される楕円曲線から定まる 2 次元ガロア表現を研究した．そして，そのガロア表現が保型形式と対応することを証明した．一方で，そのような保型形式は存在しないことが保型形式側の理論で知られていたので矛盾が生じ，解が存在しないことが導かれるという論法であった．ここで，保型形式とは，古典的には複素上半平面上のある対称性を満たす解析関数である．ワイルズの結果は楕円曲線と保型形式の対応と説明されることが多い（志村‐谷山予想）．現在では，この対応は表現論的な枠組みにおけるラングランズ対応の一例として理解されている．これは次のような意味である．まず，保型形式は GL(2)という代数群のアデール点上の関数と理解される．代数群のアデール点上のなす群の関数空間への作用を通じて保型表現を生成する．ワイルズが解決したのは，特別な場合に，楕円曲線という幾何的対象から定まる 2 次元ガロア表現が，代数群 GL(2)の保型表現に対応する非可換類体論・ラングランズ対応を確立するということであった．大雑把に言えば，この結果を一般化して，n 次元ガロア表現と代数群 GL(n)の保型表現が対応するであろうというのが，GL(n)の非可換類体論である．非可換類体論は代数群ごとに存在すると予想されている．

現代では非可換類体論は表現論の言葉を使って定式化されるため，その理解には表現論の理解が必要不可欠である．非可換類体論は，ほとんどの場合に未解決であるが，解決されている場合において，重要な役割を果たすのが前述の志村多様体である．志村多様体のコホモロジーには，代数群の有限アデール点がヘッケ作用素を経由して作用する．このヘッケ作用は保型表現に対応する．一方，志村多様体の標準モデルのエタールコホモロジーからガロア表現を得ることができる．こうして得られたガロア表現をヘッケ作用で分解することで，保型表現に対応するガロア表現が得られるだろうというのが，大雑把な予想である．この予想は，GL(2)のような単純な代数群の場合には「ほぼ正しい」が，一般には様々な修正が必要であることが知られている．その修正は極めて非自明であり，まだ完全な解答は得られていない．

したがって，志村多様体やそれに関連した代数多様体の数論幾何学を詳細に研究して，その非可換類体論への応用を得ることが大切である．志村多様体やガロア表現，保型表現は，どちらかというと抽象的に定義・研究されることが多いが，これらを具体的に研究することの重要性も高まっている．

２．研究の目的

前述の背景に基づき，本研究課題では，志村多様体の研究を行い，その非可換類体論への応用を目指すことを目的とした．

ガロア表現の具体的な研究や，その整数論的な問題および幾何的な問題への応用も目指して研究を行った．

３．研究の方法

志村多様体には代数的・幾何的・解析的など様々な側面があるので，本研究課題においても様々な方法を組み合わせることで研究を行った．

志村多様体や非可換類体論の周辺分野には，様々な幾何的対象が現れることが知られている．そこで，志村多様体の理論に応用可能と期待されるような幾何学の研究も行った．

また，最近の非可換類体論においては，表現論による定式化が用いられる．非可換類体

論の本格的な理解のためには表現論への理解が不可欠である．実際，最近では非可換類体論はガロア表現と保型表現の間の対応の形で定式化されるようになってきており，表現論の言葉を使わなければ非可換類体論の定式化を正確に理解することすら難しい状況である．そこで，志村多様体に応用可能な表現論の研究を行った．

これらの研究を行うために，志村多様体・非可換類体論に関連するテーマについての研究集会を主催し，研究打ち合わせや情報収集を行った．具体的な研究集会のテーマとしては，最近進展が著しく，志村多様体および非可換類体論の発展に密接な関係のあるものを選んだ．具体的には，最近アーサーらによって確立された古典群の跡公式の理論とその応用として得られる保型表現の分類理論や，志村多様体の基礎となっている局所対称空間のコホモロジーに関する理論，関数体上のラングランズ対応などである．非可換類体論には関数体類似があり，関数体上の場合は本来の代数体上の場合よりも理解が進んでいる．関数体上のラングランズ対応は，ベクトル束のモジュライ・スタックやその上の偏屈層など，非常に興味深い幾何的・表現論的対象とつながっていることが明らかになりつつある．関数体上のラングランズ対応の理解を進めることは，代数体上のもともとの非可換類体論を理解することにもつながると期待される．また，最近の保型表現論においては，個々の保型表現を別々に研究するだけでなく，代数群とその部分代数群の組を考えて，大きな代数群の保型表現を部分群に制限したときの様子の研究が盛んに行われている．このような研究は，周期の研究または分岐則の研究と呼ばれる．志村多様体の幾何学とも深い関係があるため，周期も研究集会のテーマとした．さらに，保型表現を理解するためにはヘッケ作用素の跡を理解する必要があり，跡は跡公式と呼ばれる公式で計算することができる．跡公式も研究集会のテーマとした．

研究集会で得られた様々な知見を活用して，志村多様体の幾何学やガロア表現の研究を行った．また，様々な代数群から定まる志村多様体の幾何学やそのコホモロジー，また志村多様体に関連する代数多様体の幾何学やコホモロジーについての研究も行った．特に直交群から定まる志村多様体の幾何学について詳細な研究を行い，その整数論への応用を考察した．

４．研究成果

この研究課題を実施することで，当初想像していた以上に様々な方向への広がりのある成果を得ることができた．

本研究課題のために主催した研究集会のテーマは古典群の保型表現論，局所対称空間のコホモロジー，関数体上の大域ラングランズ対応，保型表現の周期，跡公式のように多岐に渡るが，これらについて理解を深めることができた．これらの研究集会には，その分野を専門に学んでいる研究者だけでなく，将来これらの分野についての研究を行うことを考えている大学院生や若手研究者も招聘した．これにより，志村多様体や非可換類体論に関連する分野を研究している研究者間の人的交流を推進した．

志村多様体やガロア表現の重要性は，非可換類体論だけでなく，様々な数学的対象と密接に関わっていることにある．意外な繋がりが発見されることも多い．非可換なガロア表現を構成する最もよく知られた方法は，楕円曲線から構成するというものである．これはワイルズの研究にも現れており，得られるガロア表現は楕円曲線の場合でさえ非自明である．楕円曲線より複雑な対象については，最近では特別な種類のアーベル多様体やカラビ‐ヤウ多様体等に伴うガロア表現も研究されるようになってきたが，まだ分からないことも多い．現実には志村‐谷山予想のような予想がきちんと定式化されているケースも少ない．そこで，楕円曲線の次に単純な幾何的対象であると考えられる平面曲線について，そのヤコビ多様体の等分点から得られるガロア表現について，具体的な研究を行った．平面曲線に伴うガロア表現を具体的に考察することで，平面曲線の定義方程式や対称性について，整数論的な結果を得ることができた．平面曲線の定義方程式については，これまで考えられてこなかったタイプの局所大域原理が存在することを発見した．これは次のような問題である．一般に，射影平面に埋め込まれた平面曲線について，その定義方程式を線形形式を成分とする対称行列の行列式で書くことを考える．このように書くことができるとき，平面曲線は対称行列式表示を持つという．与えられた平面曲線について，それが対称行列式表示を持つかどうかを判定することは，基本的だが大切な問題である．大域体上定義された平面曲線に対して，もし，その平面曲線が大域体のすべての素点における完備化において対称行列式表示を持つと仮定したときに，その平面曲線が大域体上で対称行列式表示を持つかという問題を局所大域原理の問題という．平面曲線の対称行列式表示の存在の局所大域原理についての研究を行い，2 次および 3 次の平面曲線については局所大域原理が成立するが，4 次曲線の場合には一般には成立しないことを証明した．5 次以上の場合は未解決であり，今後の解明が待たれる．この結果の証明には，ヤコビ多様体の等分点から定まるガロア表現の組み合わせ的な性質と群論の計算を用いる．また，フェルマー型の 4 次曲線について，その 4 等分点に定まるガロア表現を具体的に計算することに成功した．フェルマー型の 4 次曲線はレベル 64 のモジュラー曲線と同型であることが知られているため，保型形

式論・志村多様体論の観点からも興味深い例を与える結果であると考えている．これ以外にも，平面曲線は，特別な場合にはモジュラー曲線と呼ばれる志村多様体のモデルになっていることがある．本研究で得られたガロア表現に対する知見やその研究手法は，非可換類体論をより具体的に研究する際に興味深い実例を与えると期待している．

志村多様体は様々な代数群から構成することができることが知られている．例えば，有理数体上の代数群 GL(2)からは古くから研究されている志村多様体であるモジュラー曲線が定まり，総実代数体上の代数群 GL(2)からはヒルベルト・モジュラー多様体が定まる．有理数体上の代数群 GSp(2n)からはジーゲル・モジュラー多様体と呼ばれる種類の志村多様体が定まる．ジーゲル・モジュラー多様体は主偏極アーベル多様体のモジュライ空間とも関係するため，志村多様体の理論においては特に大切である．これとは別の系列の代数群としては，直交群やスピノル群から定まる志村多様体もある．これらは直交型の志村多様体と呼ばれている．ある種の格子から定まる直交型の志村多様体は K3 曲面の周期やモジュライ空間といった代数幾何的な対象とも関わっていることが知られており，応用上も重要である．また，直交型の志村多様体は，次元の大きなジーゲル・モジュラー多様体に埋め込むことができることが知られており，その埋め込み写像を研究することは特に大切である．直交型の志村多様体は，複素数体上では古くから研究されていた．しかし，直交型の志村多様体について，整数論的な立場から，そのレフレックス体上の標準モデルや有限体上のモデルが本格的に研究されるようになってきたのは，つい最近のことである．直交群から定まる志村多様体の有限体上での幾何的性質についての研究も行った．K3 曲面についても結果を得ることができた．

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計　4　件）

(1) Y. Ishitsuka, T. Ito, The local-global principle for symmetric determinantal representations of smooth plane curves in characteristic two, J. Pure Appl. Alg. 221 (2017), no. 6, 1316-1321. DOI:10.1016/j.jpaa.2016.09.013
(2) Y. Ishitsuka, T. Ito, The local-global principle for symmetric determinantal representations of smooth plane curves, Ramanujan J. 43 (2017), no. 1, 141-162. DOI: 10.1007/s11139-016-9775-3
(3) Y. Ishitsuka, T. Ito, On the symmetric determinantal representations of the Fermat curves of prime degree, Int. J. Number Theory 12 (2016), no. 4, 955-967. DOI: 10.1142/S1793042116500597
(4) 伊藤哲史，局所 Langlands 対応の幾何的構成，第 21 回整数論サマースクール報告集，2014 年．

〔学会発表〕（計　3　件）

(1) 伊藤哲史，Foliations on orthogonal Shimura varieties and the Tate conjecture for products of K3 surfaces, Arithmetic Geometry and Related Topics，2017 年
(2) 伊藤哲史，平面曲線の定義方程式にまつわる整数論的問題について，愛媛大学代数セミナー，2015 年
(3) 伊藤哲史，Perfectoid 空間 II - 数論への応用について-，代数的整数論とその周辺，2014 年

〔図書〕（計　0　件）

〔産業財産権〕

○出願状況（計　0　件）

○取得状況（計　0　件）

６．研究組織
(1)研究代表者
伊藤　哲史　（ITO, Tetsushi）
京都大学・理学研究科・准教授
研究者番号：10456840