様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９－１、Ｚ－１９　（共通）

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

令和　 元 年　 ６ 月 １２ 日現在

機関番号：１５３０１
研究種目：若手研究(B)
研究期間：2014～2018
課題番号：２６８０００２２

研究課題名（和文）p進体上のユニタリ群の数論的因子

研究課題名（英文）L and epsilon factors of unitary groups over a p-adic field

研究代表者
宮内　通孝（Miyauchi, Michitaka）

岡山大学・教育学研究科・准教授

研究者番号：７０５３３６４４

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　2,900,000円

研究成果の概要（和文）：非アルキメデス的局所体上で定義された3変数分岐ユニタリ群U(2,1)のスーパーカスピダル表現に対してニューフォーム理論を構築し、ニューフォームの空間の次元が1であることや、ニューフォームのゼータ積分がL-因子と一致することなどを証明した。また、U(2,1)のレベル零スーパーカスピダル表現に対して、Rankin-Selberg型積分の定めるL-因子の計算を行った。

研究成果の学術的意義や社会的意義
整数論における主要な研究対象のひとつに保型表現がある。局所ニューフォームは保型表現を調べるのに非常に有効な道具であるが、今のところいくつかの群についてしか見つかっていない。本研究はこれまでに私が導入し整備した不分岐U(2,1)のニューフォーム理論を、分岐群の場合に拡張したものである。この結果は将来保型表現への応用を考える上で必要不可欠なものである。

研究成果の概要（英文）：We establish a theory of newforms for supercuspidal representations of ramified U(2,1) over a non-archimedean local field. We prove that the space of newforms for such a representation is one-dimensional, and that zeta integrals of newforms attain L-factors. We compute Rankin-Selberg L-factors of level zero, supercuspidal representations of U(2,1).

研究分野：表現論

キーワード：L-因子　ε-因子

様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９－１、Ｚ－１９、ＣＫ－１９（共通）

１．研究開始当初の背景

非アルキメデス的局所体上定義された簡約代数群の既約許容表現から L-因子とε-因子を定義する方法のひとつとして、Rankin-Selberg 型積分を用いる手法がある。1970 年代から様々な代数群に対して種々の Ranking-Selberg 型積分が導入された。しかしながら、それらの結果の多くでは、不分岐表現に対して L-因子を計算をしただけに留まっており、分岐表現についても適切な L-因子が取り出せているかどうかについては未解決なままであった。それらの結果の中のひとつに Gelbart と Piatetski-Shapiro が 1984 年に導入した U(2,1)に対する Rankin-Selberg 型積分がある。この積分については Baruch が 1997 年の論文でも調べているが、分岐表現の L-因子は計算されていない。
ニューフォームは既約許容表現のあるコンパクト部分群で固定されるベクトルであり、その Rankin-Selberg 型積分を取ると L-因子を与えるという性質を持つ。Jacquet、Piatetski-Shapiro、Shalika が 1981 年の論文で GL(n)のニューフォームを見つけて以降、他の代数群に対してはニューフォームはしばらくの間見つかっていなかった。2007 年に Roberts と Schmidt は PGSp(4)のニューフォーム理論を発表した。彼らの論文をヒントに、私は不分岐 U(2,1)のニューフォームについて考察し、Gelbart と Piatetski-Shapiro の積分との関連について調べた。この結果は彼らの積分の定める L-因子、ε-因子を計算する手段も与えている。

２．研究の目的

本研究の目的は、非アルキメデス的局所体上定義されたユニタリ群に対してニューフォーム理論を構築することである。GL(n)や GSp(4)の場合に得られている結果と同様のものを整備して、保型表現へと応用したい。具体的には次の 3 つについて考察する。

(1) 不分岐 U(2,1)に対して Gelbart と Piatetski-Shapiro の Rankin-Selberg 型積分の定める L-因子、ε-因子を決定し、Galois 側の因子と比較する。それらが一致すれば、U(2,1)の局所 Langlands 対応を補強する結果となる。

(2) 分岐 U(2,1)に対してニューフォーム理論を構築する。保型表現への応用を考える上で、不分岐 U(2,1)だけでなく分岐する場合についても考察をする必要がある。分岐群に対してニューフォームの空間の次元が 1 であること、その積分が Gelbart と Piatetski-Shapiro の積分の定める L-因子と一致することなど、不分岐 U(2,1)の場合と同様の結果を証明する。

(3) 上記結果を一般のサイズの奇数次ユニタリ群へと拡張する。

３．研究の方法

(1) 不分岐 U(2,1)の因子の計算について。先行する結果から L-因子は Hecke 固有値を計算すれば求まり、ε-因子はコンパクト部分群の系列から定まる表現の導手から決まる。群の形が近い GL(3)の場合での Hecke 固有値の計算を整理し直して U(2,1)の場合の計算へと応用する。またスーパーカスピダル表現についてはコンパクト部分群からの誘導表現として得られることが知られている。この構成と Hecke 固有値の関係について調べる。

(2) 分岐 U(2,1)のニューフォーム理論について。ニューフォームを定める上でどのようなコンパクト部分群の系列を考えるかが最初に問題となるが、分岐 U(2,1)については不分岐の場合と同じコンパクト部分群の系列が使えると予想される。不分岐 U(2,1)の結果を分岐する場合に適用できるところまで整備し直す。

４．研究成果

本研究の成果として次の２つの結果を得た。

(1) 因子の計算について。レベル零スーパーカスピダル表現について L-因子とε-因子の計算を行った。スーパーカスピダル表現の構成の複雑さのため、一般の場合を扱うのは現状では困難である。レベル零表現の場合は、有限体上の代数群の既約カスピダル表現から容易に構成されるので、この場合を取り扱った。ニューフォームの Hecke 固有値を実際に計算することで表現の L-因子を求めることができた。この結果は分岐、不分岐 U(2,1)ともに得ることができた。不分岐群の場合の結果は雑誌論文①の一部として掲載された。ここで計算した因子は局所 Langlands 対応に適した形であることも確かめられている。

(2) 分岐 U(2,1)のニューフォームについて。分岐 U(2,1)のスーパーカスピダル表現についてニューフォーム理論を構築することができた。ニューフォームの空間の次元が１であること、オールドフォームは全てニューフォームから得られること、ニューフォームの積分は L-因子を与

えることなどが証明できた。不分岐の場合の議論を整理し直すことで、多くの結果が分岐する場合についても成り立つことがわかった。実際にはスーパーカスピダル表現でけではなく、3種類ある可約な放物型誘導表現のうちのひとつを除けば不分岐 U(2,1)の場合と同様のニューフォーム理論が構築できている。この例外の表現については現在も考察中である。

５．主な発表論文等

〔雑誌論文〕（計　1　件）

①Michitaka Miyauchi、On L-factors attached to generic representations of unramified U(2,1)、Mathematische Zeitschrift、査読有、289 巻、2018 年、1381-1408
DOI: https://doi.org/10.1007/s00209-017-2003-z

〔学会発表〕（計　2　件）

①宮内通孝、Newforms for ramified U(2,1)、神戸整数論ミニ集会、2015.5.21、
神戸大学大学院理学研究科

②宮内通孝、Newforms for ramified U(2,1)、保型形式リトリート討論会、2015.9.3、
セミナーカルチャーセンター臨湖

〔図書〕（計　0　件）

〔産業財産権〕
○出願状況（計　0　件）

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
出願年：
国内外の別：

○取得状況（計　　件）

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
取得年：
国内外の別：

〔その他〕
ホームページ等

６．研究組織

(1)研究分担者
研究分担者氏名：

ローマ字氏名：

所属研究機関名：

部局名：

職名：
研究者番号（8 桁）：

(2)研究協力者

研究協力者氏名：
ローマ字氏名：

※科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属されます。