

## 科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 29 年 6 月 14 日現在

機関番号：32689

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2014～2016

課題番号：26800025

研究課題名(和文)既約シンプレクティック多様体の退化

研究課題名(英文) Degeneration of irreducible symplectic varieties

研究代表者

永井 保成 (NAGAI, Yasunari)

早稲田大学・理工学術院・准教授

研究者番号：50572525

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 1,800,000円

研究成果の概要(和文)：既約シンプレクティック多様体の良い退化族の例を構成する問題と関連し、代数曲面の半安定退化であって特異ファイバーが3重点を持たないようなものに対して、その上の $n$ 点の相対的ヒルベルトスキームの族の局所的な構造に関して研究した。より正確には、ヒルベルトスキームのヒルベルト= Chow射の像であるところの相対的対称積の特異点の構造とその双有理変換、位相的不変量であるオービフォルドコホモロジーなどについて明らかにした。

研究成果の概要(英文)：In relation to the problem of constructing a good degeneration of irreducible symplectic manifolds, we studied the local structure of a relative Hilbert scheme associated with a semistable family of algebraic surfaces whose singular fiber has no triple point. More precisely, we clarified the structure of singularities, birational modifications and a topological invariant called orbifold cohomology of the relative symmetric product, which is given as a image of the relative Hilbert scheme under the Hilbert-Chow morphism.

研究分野：代数幾何学

キーワード：代数多様体の退化 トーリック幾何学 対称群の表現

## 1. 研究開始当初の背景

標準因子が自明であるような滑らかな射影代数多様体は、代数多様体の分類理論のなかで重要な位置を占め、また、数理物理、表現論などとも関連するきわめて興味深い対象である。標準因子が自明な滑らかな射影代数多様体は、エタール有限被覆を取ることで、アーベル多様体、カラビ・ヤウ多様体、既約シンプレクティック多様体の積に分解する。したがって、既約シンプレクティック多様体もまた非常に興味深い研究対象である。

既約シンプレクティック多様体は、正則シンプレクティック形式の存在により、常に代数多様体（あるいは複素多様体）としての次元は偶数である。もっとも次元が小さい場合は2次元の場合であって、これは特にK3曲面と呼ばれる。K3曲面は1970年代から今日まできわめて盛んに研究されており様々な特筆すべき結果があるが、特に基本的かつ重要なのは複素K3曲面に対するトレリの定理である。これは、K3曲面の2番目の整数係数コホモロジーに入る偏極ホッチ構造がK3曲面の同型類を完全に決定するというものであり、適切にマーキングされた周期写像の全単射性を意味する。

高次元の既約シンプレクティック多様体でも、2番目のコホモロジーに整数係数2次形式が存在し、その上の偏極ホッチ構造からくる周期写像を考えることができる。これはアーベル多様体やカラビ・ヤウ多様体を含め、一般の代数多様体にはない、既約シンプレクティック多様体にきわめて特徴的な性質である。このようにして得られる既約シンプレクティック多様体の周期写像について明らかにする問題は、K3曲面の理論の高次元化を考えると、避けては通れない問題であり、高次元既約シンプレクティック多様体の研究における中心的な問題の一つである。

一般に、代数多様体の周期写像の性質、例えばその写像における一点の逆像の様子などについての情報は、周期写像の境界挙動を調べることで取り出すことができる場合が多い。周期写像の境界挙動はホッチ構造の極限という線形代数的・表現論的な対象であるが、一方でそれに対応する幾何学的現象が代数多様体の退化である。例えば、上述のK3曲面に対するトレリの定理は、K3曲面の退化と周期の境界挙動の関係を精密に調べることによっても証明することができる。

このような観点から、高次元の既約シンプレクティック多様体の2番目のコホモロジーの上の周期写像の諸性質と関連して、既約シンプレクティック多様体の退化について研究することは、自然でありかつ重要な問題である。しかし、本研究課題採択時には、高次元既約シンプレクティック多様体の退化に関する研究はほとんどなされておらず、研究代表者が過去に行った研究があるのみであった。

## 2. 研究の目的

本研究課題の研究代表者は過去に既約シンプレクティック多様体の退化と周期写像の挙動についての基本的な問題について研究を行ったが(2008年)、より深い研究のためには、既約シンプレクティック多様体の良い退化の具体例について検討する必要がある。ここで、既約シンプレクティック多様体の良い退化とは、理想的には半安定でありかつ相対的標準因子が自明になるようなものを指す。上述2008年の論文では、K3曲面の良い退化の一種であるクリコフの2型退化の相対的ヒルベルトスキームの適当な双有理変換を取ることでK3曲面の2点のヒルベルトスキームとして得られる既約シンプレクティック多様体の良い退化の例を構成した。しかし、当該論文の方法はより次元の高い例を構成するには不十分な点があった。本課題の研究は、より高い次元のK3曲面のヒルベルトスキームの良い退化族を構成することを目的とした。

## 3. 研究の方法

上述の良い退化の構成法は、K3曲面の退化族に対する相対的ヒルベルトスキームを考えるものであったが、ヒルベルトスキームはイデアルをパラメータづけるモジュライ空間であるため、元の族の退化ファイバーの臨界点、つまり射が滑らかにならない点においては可換環論的な理由からその構造が急に複雑になる。特に、滑らかな閉部分スキームの極限としては得られないような閉部分スキームをパラメータづける「エキゾチックな」既約成分が現れるといった「病理的現象」が頻繁に起こることが知られている。「エキゾチックな」既約成分の制御はよく知られたコホモロジーなどの情報のみを使って制御することは非常に困難であることが知られている。このようなヒルベルトスキームの振る舞いが、良い退化族の例を構成することの妨げになっていた。

そこで、本課題研究においては、ヒルベルトスキームを直接調べることをあきらめて、ヒルベルトスキームの双有理収縮(ヒルベルト=チョウ射)の像である、K3曲面の退化族の相対的対称積を基本的な研究の対象とする方法をとった。一般に、対称積はヒルベルトスキームよりも悪い特異点を持つ一方で、既約な代数多様体の対称群による商として得られるため、初めから既約な代数多様体になることが分かっており、「エキゾチックな」既約成分の制御という極めて難しい問題に頭を悩ませる必要がなくなるという利点が見込まれた。また、局所的には半安定退化はトーリック多様体として記述されるため、線形格子と凸体への対称積の作用という扱いやすい数学的対象を調べることに帰着し

て情報を取り出せることを見込んで研究をスタートさせた。

#### 4. 研究成果

本課題の研究成果は、曲面の半安定退化であって、三重点をもたないようなものの局所モデル(トーリックモデル)に対して、その相対的対称積の構造と双有理改変にかかわるものであり、上記の  $K3$  曲面上の  $n$  点のヒルベルトスキームとして得られる既約シンプレクティック多様体の良い退化の構成における局所的構造を明らかにするものである。

まず、曲面の半安定退化のトーリックモデルそれ自身の底曲線上の  $n$  階のファイバー積のトーリック多様体としての記述を与え、トーリック幾何を用いて、その特異点の小さい部分解消が構成できることを示した。これは直ちに、元の曲面族の相対対称積の小さい部分特異点解消を構成する。自己積の部分解消は、対称群を鏡映群として実現する  $A$  型のルート系のコクセター複体に付随するトーリック多様体上のトーラス不変な因子に対応する2つの直線束の直和の全空間として得られることが証明でき、このことによって、自己積への対称群の作用の様子、特に、作用の固定点における安定化部分群の接空間への作用を具体的に書き下すことができる。これによって、自己積の対称群の作用による商として得られるモデルが、高々ゴーレンスタイン商特異点のみを持ち、退化ファイバーはそのなかで  $V$ -正規交差な因子になることが直ちに従う。このような退化は半安定退化ではないものの、高次元代数多様体の双有理幾何とホッチ理論の観点から見れば半安定退化に極めて近いものであり、その代用として用いるのに十分なものである。

たとえば、ゴーレンスタイン商特異点のみを持つような商多様体においては、オービフォルドコホモロジーは通常の整数による次数付けを持っており、もし商多様体がクレパントな解消を持てば、その特異点解消の普通のコホモロジーと同型になる(マッカイ対応)。本研究では、元の半安定族の自己積への対称群の作用の固定点の様子を非常に詳細に調べることにより、上述の  $V$ -正規交差退化モデルのオービフォルドコホモロジーの次元を計算する一般的な公式を与えることができた。これは、ヒルベルトスキームの退化の局所的な挙動がコホモロジーの退化、すなわち周期写像の境界挙動にどのように寄与するかを示す公式である。その証明の中で、組み合わせ論的表現論の結果である、 $A$  型ルート系に付随するトーリック多様体のコホモロジーを対称群の表現と見たときの既約分解公式(Procesi, Dolgachev-Lunts, Stembridge の公式)が重要な役割を果たしたことは非常に興味深い。

残念ながら、上述の  $V$ -正規交差退化モデルでは、その一般ファイバーは元の曲面族の一般ファイバーの対称積になっており、ヒルベルトスキームの退化族を構成するには、さらなる双有理改変が必要である。この点に関しては、 $n$  が  $2, 3, 4$  の場合について、ヒルベルト=チョウ射と類似の双有理射があつて、端末的ゴーレンスタイン商特異点のみをもつヒルベルトスキームの  $V$ -正規交差退化モデルを具体的に構成できることを示した。 $n$  が一般の場合で類似の構成が可能であろうと予測されるが、現時点ではそれを証明するには至っていない。障害となっているのは固定点集合における各点の安定化部分群の作用の様子が複雑になる点が存在することであり、このような点の周りでの挙動を  $n$  に依らずに一様に記述する方法を見出す必要がある。

なお、本課題研究と同時期にガルブランドセン・ハーレ・フーレックらも同様の問題意識に基づく研究を行い、GIT 商を用いる全く異なる方法で類似の結果を得ている。彼らの構成法と本研究における構成法の間についてもトーリック多様体に対するGIT 商を求める方法を応用することで明らかにされることが見込まれ、有望なアプローチがあることも判明しているが、この点も将来の研究の課題として残された。

上述の研究成果に関しては、これを研究論文“Symmetric Products of a Semistable Degeneration of Surfaces”にまとめ、現在査読付学術雑誌に投稿中である。

#### 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計0件)

[学会発表](計4件)

2016.08.29. Nagai, Yasunari,  
Relations among determinantal invariants, On explicit description of holomorphic symplectic varieties, 大沼国際セミナーハウス

2015.12.17. Nagai, Yasunari,  
Symmetric products of a semistable degeneration of surfaces, Singularities and invariants of higher dimensional algebraic varieties, 京都大学 数理解析研究所

2015.10.30. Nagai, Yasunari,  
Symmetric products of a semistable degeneration of surfaces, Japanese-European Symposium of Symplectic Varieties and Moduli Spaces, 京都大学 数理解析研究所

2015.03.06. Nagai, Yasunari,

Symmetric products of a semistable  
degeneration of surfaces,  
Mini-Conference on Algebraic Geometry,  
National Taiwan University  
(すべて国際研究集会における招待講演)

〔図書〕(計 0 件)

6 . 研究組織

(1)研究代表者

永井 保成 (NAGAI, Yasunari)

早稲田大学理工学術院・准教授

研究者番号 : 50572525