

## 科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 29 年 6 月 1 日現在

機関番号：15401

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2014～2016

課題番号：26800028

研究課題名(和文)ヒーガード分解の写像類群の研究

研究課題名(英文)The mapping class groups of Heegaard splittings

研究代表者

古宇田 悠哉(Koda, Yuya)

広島大学・理学研究科・准教授

研究者番号：20525167

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 2,600,000円

研究成果の概要(和文)：任意の有向閉3次元多様体は、ある種数 $g$ の閉曲面により2つのハンドル体に分解される。この分解を種数 $g$ のHeegaard分解と呼ぶ。また与えられたHeegaard分解を保つ多様体の自己同相写像のイソトピー類のなす群をその分解のGoeritz群と呼ぶ。本研究では、可約な種数2のすべてのHeegaard分解について、そのGoeritz群の有限表示を与えた。また、応用・関連研究として次の結果を得た：(1)種数の高い特殊なHeegaard分解のGoeritz群の有限生成性の証明；(2)2橋結び目の $(1,1)$ -分解のある種の一意性の証明；(3)3次元球面内の部分空間が「結ばれている」ことの特徴付け。

研究成果の概要(英文)：Every closed orientable 3-manifold can be decomposed into 2 handlebodies by cutting it along a closed orientable surface of genus  $g$ . This decomposition is called a Heegaard splitting. Given a Heegaard splitting, the group of isotopy classes of orientation-preserving self-homeomorphisms of the 3-manifold that preserve the splitting is called the Goeritz group of the splitting. The aim of this project was to provide a finite presentation of the Goeritz group for every reducible genus-2 Heegaard splitting, and it has completed successfully. As applications or related topics, we obtained the following: (1) a sufficient condition that the Goeritz group of a higher genus Heegaard splitting admits a finite generation set; (2) the "uniqueness" of  $(1,1)$ -decompositions of 2-bridge knots; (3) a characterization of "knotted" subspaces in terms of "relative" homotopy type of knots in the subspaces.

研究分野：位相幾何学

キーワード：3次元多様体 Heegaard 分解 写像類群 結び目 トンネル ヘンペル距離 国際情報交換 韓国

## 1. 研究開始当初の背景

任意の向き付可能な閉 3 次元多様体は、ある種数  $g$  の閉曲面で切り開くことにより 2 つのハンドル体に分解される。この分解を種数  $g$  の Heegaard 分解と呼ぶ。また、与えられた Heegaard 分解を保つ多様体の自己同相写像のイソトピー類のなす群をその分解の Goeritz 群と呼ぶ。種数が 1 以下の Heegaard 分解については、Goeritz 群の構造が完全に解明されており、また 3 次元球面の種数 2 の Heegaard 分解の Goeritz 群についても、有限表示が知られていた。さらに Heegaard 分解が十分「複雑」である場合には、この群が有限群になることが知られていた。一方で、これ以外の比較的「単純」な Heegaard 分解に対しては、Goeritz 群の構造、とりわけ有限生成可能性、有限表示可能性について具体的に何も知られていない状況であった。Goeritz 群は Heegaard 分解の対称性を記述する群であるため、分解が「単純」である方が多くの対称性を許容する。そのため群としての構造が複雑になり、研究が困難とされていた。Goeritz 群は 3 次元多様体論に根差した写像類群の興味深い部分群であり、その構造解明は、3 次元多様体の不変量や結び目理論などへの応用をもたらすことが期待されていた。

## 2. 研究の目的

本研究の目的は、種数が 2 の主要な Heegaard 分解の Goeritz 群の有限表示可能性を証明し、同時に有限表示を与えることであった。また、Goeritz 群の構造解明の応用として

- (1) 結び目の分解理論（橋分解やトンネル理論）への新たな知見を与えること
- (2) Heegaard 分解のモジュライ空間の基本群の構造を解明すること

を目標に研究を行った。

## 3. 研究の方法

Goeritz 群が余コンパクトに作用する単連結な単体複体を構成し、その頂点・辺の固定部分群の計算から群全体の表示を与える Bass-Serre 理論を適用した。各 Goeritz 群に対して、この単体複体を適切に構成することが議論の核である。本研究では、ハンドル体の円盤複体から、この群の作用に適合した部分複体を取り出すことに焦点を当てた。具体的には

- (1) 2 次元球面と円周の直積多様体  $S^2 \times S^1$ 、および一部のレンズ空間の Heegaard 分解に対しては、初等的円盤のなす複体

- (2) 可約な 3 次元多様体の Heegaard 分解に対しては、半初等的円盤のなす複体
- (3) 残された一般のレンズ空間に対しては初等的円盤の連結成分を頂点とする複体

を用いた。

## 4. 研究成果

可約な種数 2 の Heegaard 分解を持つ 3 次元多様体は、3 次元球面  $S^3$ 、直積多様体  $S^2 \times S^1$ 、レンズ空間  $L(p,q)$ 、およびこれらの連結和（可約な 3 次元多様体）に限られる。このうち、 $S^3$  については、上述のとおり種数 2 の Heegaard 分解の Goeritz 群の有限表示が知られていたが、残りのすべての Heegaard 分解について、その Goeritz 群の有限表示を与えた。具体的には

- (1) 直積多様体  $S^2 \times S^1$  については、初等円盤複体が木（可縮な 1 次元単体複体）になることを示し、そこへの Goeritz 群の作用を観察することで有限表示を得た。
- (2) 可約な 3 次元多様体の Heegaard 分解に対しては、半初等的円盤のなす複体が木、または可縮な 3 次元単体複体になることを示し、そこへの Goeritz 群の作用を観察することで有限表示を得た。また、この多様体に対し、種数 2 の Heegaard 分解の同値類の分類を完全に決定し、球面複体の構造も決定した。
- (3) レンズ空間については、 $L(p,q)$  の初等円盤複体の各連結成分が可縮であることを示し、 $p = \pm 1 \pmod{q}$  のときかつその時に限り、初等円盤複体が連結であることを示した。
- (4) レンズ空間のうち、初等円盤複体が連結になるものについては、そこへの Goeritz 群の作用を観察することで有限表示を得た。
- (5) レンズ空間のうち、初等円盤複体が連結にならない一般的な場合については、初等円盤複体の連結成分を頂点とする木を構成する方法を考案し、そこへの Goeritz 群の作用を観察することで有限表示を得た。

上記研究成果はすべて Sangbum Cho 氏との共同研究に基づく。上記研究の応用・関連研究として次の結果を得た：

- (1)  $S^2 \times S^1$  の種数が 1 の Heegaard 分解と、Hempel 距離が十分大きい一般種数

Heegaard 分解を連結和して得られる Heegaard 分解の Goeritz 群の有限生成性 (Sangbum Cho 氏, Arim Seo 氏との共同研究);

- (2) 「2 橋結び目の(1,1)-分解は2橋分解からの安定化により得られる」という小林・佐伯の定理の円盤複体を用いた別証明 (Sangbum Cho 氏との共同研究);
- (3) 3次元球面内の部分空間が「結ばれている」ことの, 部分空間内の結び目のホモトピー的性質を用いた特徴付け (小沢誠氏との共同研究);
- (4) レンズ空間の種数2の Heegaard 分解のモジュライ空間の基本群の有限表示可能性 (Sangbum Cho 氏との共同研究);
- (5) 2次元球面と円周の直積多様体内の結び目解消トンネルのなす複体の構造の記述 (Sangbum Cho 使途の共同研究);
- (6) 3次元多様体の分岐シャドウ複雑度と安定写像の研究 (石川昌治氏との共同研究).

#### 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計11件)

- (1) Masaharu Ishikawa, Yuya Koda, Stable maps and branched shadows of 3-manifolds, *Mathematische Annalen* 367, no. 3, 査読有, 2017, 1819-1863. DOI: 10.1007/s00208-016-1403-4
- (2) Sangbum Cho, Yuya Koda, Connected primitive disk complexes and genus two Goeritz groups of lens spaces, *International Mathematics Research Notices*. IMRN 2016, no. 23, 査読有, 2016, 7302-7340. DOI: 10.1093/imrn/rnv399
- (3) Masaharu Ishikawa, Yuya Koda, Stable maps and branched shadows of 3-manifolds, *数理解析研究所講究録* 1991 巻 ``Topology, Geometry and Algebra of low-dimensional manifolds'', 査読無, 2016, 88-97. <http://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/~kyodo/kokyuroku/2016.html>
- (4) Sangbum Cho, Yuya Koda, Seo Arim, Arc complexes, sphere complexes and Goeritz groups, *Michigan*

*Mathematical Journal* 65, no. 2, 査読有, 2016, 333-351.

DOI: 10.1307/mmj/1465329016

- (5) Yuya Koda, Makoto Ozawa, Knot homotopy in subspaces of the 3-sphere, *Pacific Journal of Mathematics* 282, no. 2, 査読有, 2016, 389-414. DOI: 10.2140/pjm.2016.282.389
- (6) Sangbum Cho, Yuya Koda, The Goeritz groups of Heegaard splittings for 3-manifolds, *数理解析研究所講究録* 1960 巻 ``Intelligence of Low-dimensional Topology'', 査読無, 2015, 6-58. <http://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/~kyodo/kokyuroku/2015.html>
- (7) 古宇田悠哉, Stable maps and branched shadows of 3-manifolds, *研究集会「Graph と 3次元多様体の研究」会議紀要*, 査読無, 2015, 1-25. <http://www.hakone-seminar.com/>
- (8) Sangbum Cho, Yuya Koda, Disk complexes and genus two Heegaard splittings for nonprime 3-manifolds, *International Mathematics Research Notices*. IMRN 2015, no. 12, 査読有, 2015, 4344-4371. DOI: 10.1093/imrn/rnu061
- (9) Yuya Koda, Automorphisms of the 3-sphere that preserve spatial graphs and handlebody-knots, *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society* 159, no. 1, 査読有, 2015, 1-22. DOI: 10.1017/S0305004114000723
- (10) Yuya Koda, Makoto Ozawa, with an appendix by Cameron Gordon, Essential surfaces of non-negative Euler characteristic in genus two handlebody exteriors, *Transactions of the American Mathematical Society* 367, no. 4, 査読有 2015, 2875-2904. DOI: 10.1090/S0002-9947-2014-06199-0
- (11) Sangbum Cho, Yuya Koda, The genus two Goeritz group of  $S^2 \times S^1$ , *Mathematical Research Letters* 21, no. 3, 査読有, 2014, 449-460. DOI: 10.4310/MRL.2014.v21.n3.a3

[学会発表](計28件)

- (1) Sangbum Cho, The mapping class groups of reducible Heegaard splittings

- of genus two, The 12th East Asian School of Knots and Related Topics, 東京大学 (東京都), 2017年2月15日.
- (2) 古宇田 悠哉, 結び目の transient number について, 研究集会「Graph と 3次元多様体の研究」, 東洋大学箱根保養所 (箱根町), 2016年10月26日.
- (3) Yuya Koda, The Goeritz groups of Heegaard splittings for 3-manifolds, AMS Sectional Meeting ``Special Session on Decomposing 3-manifolds'', Bowdoin College, Brunswick (アメリカ), 2016年9月24日.
- (4) Yuya Koda, Stable maps and branched shadows of 3-manifolds, The 7th HYU Math-Workshop ``Low Dimensional Topology'', Hanyang University, Seoul (韓国), 2016年9月9日.
- (5) Sangbum Cho, Haken spheres for genus two Heegaard splittings, The 11th East Asian School of Knots and Related Topics, 大阪市立大学, 2016年1月27日.
- (6) Masaharu Ishikawa, Stable maps and branched shadows of 3-manifolds, ``The 3rd Franco-Japanese-Vietnamese Symposium on Singularities'', Vietnam Academy of Science and Technology, Ha Noi (ベトナム), 2015年12月4日.
- (7) Yuya Koda, The tree of tunnels for knots in  $S^2 \times S^1$ , AMS Sectional Meeting ``Special Session on Spatial Graphs'', California State University, Fullerton (アメリカ), 2015年10月25日.
- (8) 古宇田 悠哉, 3次元多様体の安定写像と分岐シャドウ, N-KOOK セミナー, 大阪市立大学文化交流センター (大阪市), 2015年10月3日.
- (9) 古宇田 悠哉, ハンドル体結び目のモジュライ空間について, 研究会「ハンドル体結び目とその周辺 VIII」, 早稲田大学 (東京都), 2015年9月26日.
- (10) 古宇田 悠哉, Arc complexes, sphere complexes and Goeritz groups, 農工大セミナー, 東京農工大学 (東京都), 2015年7月31日.
- (11) 古宇田 悠哉, Heegaard 分解の Goeritz 群, 東工大トポロジーセミナー, 東京工業大学 (東京都), 2015年7月15日.
- (12) 古宇田 悠哉, Heegaard 分解の Goeritz 群 - 有限表示とその応用 -, 東京理科大学 特異点・トポロジーセミナー, 東京理科大学 (野田市), 2015年7月3日.
- (13) 石川 昌治, 3次元多様体の安定写像と双曲体積について, 大岡山談話会, 東京工業大学 (東京都), 2015年6月24日.
- (14) 石川昌治, Stable maps and branched shadows of 3-manifolds, トポロジー火曜セミナー, 東京大学(東京都), 2015年6月16日.
- (15) Masaharu Ishikawa, Stable maps and hyperbolic volumes of 3-manifolds, ``Singularities in Generic Geometry and applications'', 京都大学数理解析研究所 (京都市), 2015年6月10日.
- (16) Yuya Koda, Stable maps and branched shadows of 3-manifolds, 京都大学数理解析研究所 合宿型セミナー "Topology, Geometry and Algebra of low-dimensional manifolds", 沼津 KKR はまゆう (沼津市), 2015年5月26日.
- (17) 古宇田 悠哉, The Goeritz groups of Heegaard splittings for 3-manifolds, 研究集会 ``Intelligence of Low-dimensional Topology'', 京都大学数理解析研究所 (京都市), 2015年5月21日.
- (18) Sangbum Cho, The Goeritz groups of 3-manifolds, 2015 KMS Spring Meeting, Pusan National University, Busan (韓国), 2015年4月25日.
- (19) 小沢 誠, Knot homotopy in subspaces of the 3-sphere, 日本数学会2015年度年会, 明治大学 (東京都), 2015年3月24日.
- (20) 古宇田 悠哉, Stable maps and branched shadows of 3-manifolds, 研究集会 ``Branched Coverings, Degenerations, and Related Topics 2015'', 東北学院大学 (多賀城市), 2015年2月21日.

- (21) Yuya Koda, Knot homotopy in subspaces of the 3-sphere, The 5th HYU Math-Workshop "Low Dimensional Topology", Hanyang University, Seoul (韓国), 2015年2月4日.
- (22) Sangbum Cho, The Goeritz groups of 3-manifolds, 広島大学 トポロジー・幾何セミナー, 広島大学 (東広島市), 2015年1月13日.
- (23) 古宇田 悠哉, 3次元多様体の安定写像と分岐シャドーについて, 広島大学 談話会, 広島大学 (東広島市), 2015年1月13日.
- (24) 古宇田 悠哉, Knot homotopy in a subspace of the 3-sphere, 広島大学 トポロジー・幾何セミナー, 広島大学 (東広島市), 2014年11月18日.
- (25) 古宇田 悠哉, Stable maps and branched shadows of 3-manifolds, 研究集会「Graphと3次元多様体の研究」, 東洋大学箱根保養所 (箱根町), 2014年10月21・22日.
- (26) 石川 昌治, 3次元多様体の安定写像と分岐シャドーについて, 日本数学会2014年度秋季総合分科会, トポロジー分科会特別講演, 広島大学 (東広島市), 2014年9月27日.
- (27) Makoto Ozawa, Knot homotopy in a subspace of the 3-sphere, "Knots and Low Dimensional Manifolds: a Satellite Conference of Seoul ICM 2014", BEXCO Convention & Exhibition Center II, Busan (韓国), 2014年8月25日.
- (28) Yuya Koda, Stable maps and branched shadows of 3-manifolds, "the First Joint International Meeting 2014 of the Spanish and Italian Mathematical Societies (RSME-SCM-SEMA-SIMAI-UMI)", University of the Basque Country, Bilbao (スペイン), 2014年6月30日.

〔その他〕

ホームページ:

<http://home.hiroshima-u.ac.jp/ykoda>

## 6. 研究組織

- (1) 研究代表者  
古宇田 悠哉 (KODA, Yuya)  
広島大学・大学院理学研究科・准教授  
研究者番号: 20525167
- (2) 研究分担者  
なし
- (4) 連携研究者  
なし
- (5) 研究協力者  
石川 昌治 (ISHIKAWA, Masaharu)  
小沢 誠 (OZAWA, Makoto)  
CHO, Sangbum  
SEO, Arim