

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 30 年 6 月 22 日現在

機関番号：10106

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2014～2017

課題番号：26800038

研究課題名(和文) 指標多様体内の離散表現の形

研究課題名(英文) Discrete representations in the character variety of a surface group

研究代表者

蒲谷 祐一 (Kabaya, Yuichi)

北見工業大学・工学部・准教授

研究者番号：70551703

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 2,000,000円

研究成果の概要(和文)：1点穴あきトーラスの基本群の $PSL(2, \mathbb{C})$ 表現の共役類全体のなす集合は指標多様体と呼ばれる。本研究では指標多様体の中の離散忠実表現，またその稠密な開集合である擬フックス表現のなす部分集合を調べた。特にある単純閉曲線の長さを固定することで得られる線形スライスについて調べた。これまでに，線形スライスの中の擬フックス表現のなす集合は，長さが短い場合は連結，長い場合には2つ以上の成分からなる事が知られていた。本研究では，これらの連結成分が Goldman による擬フックスホロノミーをもつ複素射影構造の分類の言葉で特徴付けた。特に連結成分が2つ以上ある時は，無限に連結成分が存在する事が示せた。

研究成果の概要(英文)：For a hyperbolic surface S , the set of $PSL(2, \mathbb{C})$ -representations of the fundamental group of S up to conjugation is called the character variety $X(S)$. For simplicity, we assume that S is a once-punctured torus. We studied the subset of the character variety consisting of discrete faithful representations, or its open dense subset consisting of quasi-Fuchsian representations. In particular, we studied the slice of $X(S)$ obtained by fixing the (complex) length of a simple closed curve. It is known that the set of quasi-Fuchsian representations in the slice consists of one connected component if the length is short, but there are more than two components if the length is long. In this research project, we showed that these components are characterized in terms of Goldman's classification of the complex projective structures with quasi-Fuchsian holonomy. As a corollary, we showed that there are infinitely many connected components in the slice if it has more than two components.

研究分野：双曲幾何学

キーワード：クライン群 指標多様体 擬フックス群 双曲幾何学 複素射影構造 曲面群 写像類群

1. 研究開始当初の背景

3次元双曲空間 \mathbb{H}^3 の向きを保つ等長変換群はリー群 $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$ と同一視できる. S を (オイラー標数が負の) 曲面とする. 基本群の表現 $\rho: \pi_1(S) \rightarrow \mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$ が離散忠実である時, $\mathbb{H}^3/\rho(\pi_1(S))$ は S とホモトピー同値である3次元双曲多様体になる. よって

$$X(S) = \mathrm{Hom}(\pi_1(S), \mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})) / \sim_{\mathrm{cong.}}$$

∪

$$AH(S) = \{[\rho] \in X(S) \mid \rho \text{ は離散忠実}\}$$

∪

$$QF(S) = \{[\rho] \in X(S) \mid \rho(\pi_1(S)) \text{ は擬フックス群}\}$$

とすれば, $AH(S)$ は S とホモトピー同値な3次元双曲多様体のモジュライと思える. ここで表現の空間 $X(S)$ は指標多様体と呼ばれる. また $AH(S)$ は閉集合で, $QF(S)$ はその開部分集合である事が知られている. 2000年代に解決した Ending Lamination Conjecture (ELC) によって, $AH(S)$ を完全に記述する不変量 (エンド不変量) がある事が知られている. また $QF(S)$ は擬等角写像論によってタイヒミュラー空間を用いて簡明に記述され, ELC から $AH(S)$ の中で稠密である事もわかっている.

このように集合としては $AH(S)$ や $QF(S)$ は完全に理解されていると言えるが, これらが指標多様体 $X(S)$ の中にどのように入っているかは, 依然として難しい問題である. 具体的には self-bumping と呼ばれる現象や, $AH(S)$ の局所非連結性などが知られている.

2. 研究の目的

本研究では, 指標多様体 $X(S)$ の中に $AH(S)$ や $QF(S)$ がどのような形で含まれているかを調べる事を目的とする. 特に計算機を用いることで離散忠実表現がどのように変形していった, 離散でない, あるいは忠実でない表現に変化していく様子を可視化することを目的とする. 可視化で得られた知見から理論的な結果を得る事が最終的な目標となる.

3. 研究の方法

擬フックス表現に対して, 付随して bending lamination というものが定まる. この bending lamination での “折り曲げ方” を変えていく事で表現を変形する事ができる. 特に bending lamination が単純閉曲線である場合には, 以前研究した $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$ 表現の Fenchel-Nielsen 座標を用いることで, この変形を具体的に計算機で実行できる形で記述する事ができる.

4. 研究成果

指標多様体 $X(S)$ そのものは高次元のアファイン多様体なので, その複素1次元のスライスを考え, その中に擬フックス表現が入っているかを調べた. ここでは簡単のため S が1点穴あきトーラスの場合で説明する. S 上の単純閉曲線に対して, 表現 ρ の (複素の) 長さを考える事ができる. この長さを一定に固定する事で $X(S)$ の複素1次元部分多様体を得られる. この部分多様体は線形スライスと呼ばれ, 多くの研究者により調べられている. また複素1次元なので, その中の離散忠実表現などが具体的に可視化できる対象でもある.

McMullen の結果によって, 線形スライスの中の擬フックス表現のなす部分集合は, いくつかの単連結領域からなる事が知られている. また小森-山下による結果から, 線形スライスを取る際に固定する単純閉曲線の長さが, 短い時には1つの連結成分からなる事, 長い場合には2つ以上の連結成分を持つ事が知られている.

本研究での主結果は, $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$ 表現の空間 $X(S)$ を複素射影構造の空間 $P(S)$ に持ち上げる事で, 擬フックス表現のなす各連結成分を記述したことである. 擬フックス表現をホロノミーにもつ複素射影構造の分類は Goldman によって得られていて, これらは非負整数係数の重み付きの単純閉曲線のなす集合 (integral measured laminations) で分類される事が知られている. また線形スライスは, complex earthquake と呼ばれる S の複素射影構造全体のなす空間のスライスに自然に持ち上がる事がわかる. Goldman の結果から

complex earthquake 中の擬フックスホロミーをもつ複素射影構造に、非負整数係数の重み付きの単純閉曲線が対応する。この重み付き単純閉曲線が異なれば、それらは擬フックスホロミーのなす射影構造全体の中で別々の連結成分に含まれる事がわかる。これらの連結成分を線形スライスに落とせば、(簡単にわかる条件が必要だが) 別々の連結成分になる事がすぐにわかる。

この記述により小森-山下により知られていた、2つ以上の連結成分をもつ場合には、実際には無限に連結成分をもつ事が示せた。無限にもつことは Dehn ツイストによる作用によるものであるが、Dehn ツイストの作用からでは得られない連結成分があることも示す事ができる。このような意味で小森-山下の結果を精密化する事ができた。従来の手法は1点穴あきトーラスの特殊性に依存したものがほとんどで、他の双曲曲面に一般化する事は難しいように見えた。本研究で得られた複素射影構造を利用する記述は、1点穴あきトーラスだけではなく、一般の双曲曲面に対して一般化する事が可能であり、論文では一般化についてまで述べている。

これらの結果は、表現の変形を計算機で可視化する事で、複素射影構造における grafting という操作が「見えた」ことで得られたもので、本研究の独自な点であると言える。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 3 件)

- ① Koji Fujiwara and Yuichi Kabaya, *Computing Kazhdan constants by semidefinite programming*, accepted for publication in *Experimental Mathematics*, 査読有, (Published online: 29 Nov 2017, DOI:10.1080/10586458.2017.1396509). arXiv:1703.04555
- ② Yuichi Kabaya and Ayumu Inoue, *Quandle homology and complex volume*, *Geometriae Dedicata*: Volume 171, 査読有, Issue 1 (2014), pp 265-292. arXiv:1012.2923

- ③ Yuichi Kabaya, *Parametrization of $PSL(2, C)$ -representations of surface groups*, *Geometriae Dedicata*, Volume 170, 査読有, Issue 1 (2014), pp. 9-62. arXiv:1110.6674

[学会発表] (計 21 件)

- ① Yuichi Kabaya, *Kazhdan constants and semidefinite programming*, Rigidity School Nagoya 2017 (名古屋大学), 2017 年 11 月 23 日~26 日
- ② 蒲谷祐一, *Dunfield-Thurston の論文紹介*, Mini-Workshop on Random links and 3-manifolds (日本大学文理学部), 2017 年 9 月 6 日~9 日
- ③ 蒲谷祐一, 曲面群の $PSL(2, C)$ 表現空間の離散忠実表現と複素射影構造, 幾何学コロキウム (北海道大学), 2017 年 6 月 23 日
- ④ 蒲谷祐一, *Spectral networks (survey talk)*, 研究会「2次微分の幾何とその周辺」(東京大学) 2017 年 1 月 11 日~13 日
- ⑤ 蒲谷祐一, $PSL(2, C)$ 表現空間の中の擬フックス表現, 下呂幾何学研究集会 - 吉田朋好先生古希記念研究集会- (下呂市), 2016 年 12 月 26 日~28 日
- ⑥ 蒲谷祐一, *Optimal Kazhdan constants and semidefinite programming*, トポロジーとコンピュータ 2016 (秋田市), 2016 年 10 月 28 日~30 日
- ⑦ Yuichi Kabaya, *Exotic components in linear slices of quasi-Fuchsian groups*, *Topology and Geometry of Low-dimensional Manifolds* (奈良女子大学), 2015 年 10 月 27 日~30 日
- ⑧ Yuichi Kabaya, *Exotic components in linear slices of quasi-Fuchsian groups*, 離散群と双曲空間の幾何と解析 (京都大学数理解析研究所), 2015 年 6 月 22 日~26 日
- ⑨ 蒲谷祐一, *Exotic components in linear slices of quasi-Fuchsian groups*, 日本数学会 2015 年度年会 (明治大学), 2015 年 3 月 21 日~24 日

- ⑩ Yuichi Kabaya, *Exotic components in linear slices of quasi-Fuchsian groups*, Seminar at NUS (シンガポール国立大学), 2015年3月11日
- ⑪ 蒲谷祐一, 3次元双曲幾何学について, 第12回城崎新人セミナー (城崎町), 2015年2月16日～20日
- ⑫ 蒲谷祐一, *Exotic components in linear slices of quasi-Fuchsian groups*, 「リーマン面・不連続群論」研究集会 (大阪市), 2015年2月14日～16日
- ⑬ 蒲谷祐一, *Exotic components in linear slices of quasi-Fuchsian groups*, 幾何コロキウム (東京大学), 2014年12月19日
- ⑭ Yuichi Kabaya, *Exotic components in linear slices of quasi-Fuchsian groups*, Workshop on “Geometric Structures and Representation Varieties” (KIAS, Seoul), 2014年11月10日～14日
- ⑮ Yuichi Kabaya, *Quandle cocycles from group cocycles*, Workshop on “Quantum Topology and Physics 2014 in Fukuoka” (福岡市), 2014年9月17日～20日
- ⑯ 蒲谷祐一, 曲面群の $PGL(n, C)$ 表現の Fenchel-Nielsen 座標, 第61回幾何学シンポジウム (名城大学), 2014年8月23日～26日
- ⑰ 蒲谷祐一, 線型スライス内の *quasi-Fuchsian* 表現の成分について, 複素射影構造, bumping 研究集会 (大阪大学), 2014年6月11日～12日
- ⑱ 蒲谷祐一, 線型スライス内の *quasi-Fuchsian* 表現の成分について, 微分トポロジーセミナー (京都大学), 2014年6月3日
- ⑲ 蒲谷祐一, 線型スライス内の *quasi-Fuchsian* 表現の成分について, 低次元トポロジーセミナー (大阪大学), 2014年5月27日
- ⑳ Yuichi Kabaya, *Exotic components in linear slices of quasi-Fuchsian groups*, NII Shonan

Meeting (湘南国際村センター), 2014年4月28日～5月1日

- ㉑ 蒲谷祐一, *Virtual Haken* 予想に関わる数学, 大学院生のための集中セミナー (広島大学理学部), 2014年4月24日～4月27日

[図書] (計0件)

[産業財産権]

○出願状況 (計0件)

○取得状況 (計0件)

[その他]

プレプリント

- ① Yuichi Kabaya, *Exotic components in linear slices of quasi-Fuchsian groups*, arXiv:1412.8441, 投稿中 (2014).

ホームページ等

<http://math.cs.kitami-it.ac.jp/~kabaya/>

6. 研究組織

(1) 研究代表者

蒲谷 祐一 (KABAYA, Yuichi)

北見工業大学・工学部・准教授

研究者番号: 70551703