

## 科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 29 年 8 月 4 日現在

機関番号：14601

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2014～2016

課題番号：26800039

研究課題名(和文) 準ダイアグラムを用いた結び目・空間グラフの研究

研究課題名(英文) Study on knots, links and spatial graphs using pseudo diagrams

研究代表者

花木 良 (Hanaki, Ryo)

奈良教育大学・教育学部・准教授

研究者番号：70549162

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 1,900,000円

研究成果の概要(和文)：結び目理論や空間グラフ理論において、それらの影(射影像)の研究が盛んに行われている。研究代表者は準ダイアグラムという概念を導入していた。研究成果として、準ダイアグラムの研究の拡張を行い、二重点の少ない結び目の影に対して表を作成した。また、既存の不変量を結び目の影に対しても定義し、正結び目の結び目解消数の研究を推進した。  
アウトリーチ活動として、小学生向けの連続講座や一般の人のために理論を活用した知恵の輪の演示を実施した。

研究成果の概要(英文)：Recently study on projections (shadows) is active in knot theory and spatial graph theory. The head have introduced the notion of pseudo diagrams. We expanded this notion and made tables of knot shadows with a few double points. We defined knot invariants to knot shadows and forwarded unknotting numbers of positive knots.  
We convened classes for elementary school students and events for people at large.

研究分野：幾何学

キーワード：結び目理論 空間グラフ 結び目の影 射影像 準ダイアグラム

### 1. 研究開始当初の背景

結び目理論では、不変量を用いた研究が古くから盛んに行われている。また最近、結び目のダイアグラムの研究が盛んに行われ、ゲームも開発されている。本研究では、研究代表者が考案した準ダイアグラムを用いた研究やそれを通して得られた不変量（自明化数）の研究を行い、正結び目、結び目解消数、結び目の半順序、仮想結び目、DNA 結び目、空間グラフの絡んでいる射影像（影）の研究を推進し、結び目理論や空間グラフ理論の発展に寄与する。さらに、準ダイアグラムの研究は、アメリカの研究者たちによって大きな広がりを見せている。そこで、研究代表者も準ダイアグラムの研究の拡張を行い、より応用の広い、豊かな成果が得られる研究分野に発展させる。

研究代表者は、Pseudo diagrams of knots, links and spatial graphs, Osaka Journal of Mathematics (2010) において、一部の二重点に上下の情報を入れたものを準ダイアグラムと定義し、残っている二重点にどう上下の情報を入れても自明な結び目しか出てこない準ダイアグラムを自明と定義し、考察を行った。射影像に対して、どの二重点に上下の情報をうまく与えたら自明な準ダイアグラムになるかを考え、そのような準ダイアグラムの中で上下の情報をもっている二重点の個数の最小値を自明化数と定義し、結び目の射影像に対して自明化数を求める方法を発見し、自明化数は常に偶数であることを示した。準ダイアグラムという着想に至った経緯には、DNA 結び目があり、分子生物学の研究においてその応用の可能性を論じた [研究代表者, 結び目, 絡み目及び空間グラフの準ダイアグラムについて, 物性研究刊行会, 物性研究, 92(1), 137-138 (2009)].

研究代表者は射影像の自明化数を介して、結び目の新たな不変量自明化数を定義し、考察を行った。この不変量は、正結び目の自明化数の結び目解消数と関連の強いものであることを示し、予想と部分的解答を与えた。自明化数の研究を応用して、結び目の結び目解消数が最小交点数マイナス2の半分となる結び目の特徴づけを行った。[Abe-研究代表者-Higa, The unknotting number and band-unknotting number of a knot, Osaka Journal of Mathematics (2012)]. さらに、準ダイアグラムの概念は、仮想結び目に拡張した研究 [A. Henrich etc, Classical and Virtual Pseudodiagram Theory and New Bounds on Unknotting Numbers and Genus, Journal of Knot Theory and Its Ramification. (2011)], 準結び目の理論 [A. Henrich etc, The Theory of Pseudoknots, Journal of Knot Theory and Its Ramification. (2013)], 区分的線分の準ダイアグラムの研究 [M. Durava etc, Piecewise-linear pseudodiagrams,

arXiv:1308.6776] などの研究が行われ、海外の研究者からも注目を集めていた。

### 2. 研究の目的

準ダイアグラムの研究がより広がり、豊かなものになるように、以下の研究を行う。

#### ・準ダイアグラムの研究の拡張

既存の準ダイアグラムの研究では、射影像の二重点に上下の情報を入れて得られるダイアグラムのみを考えている。しかし、実際の DNA の写真をみると、紐が交差しているのか接しているのかわからないことがある。そこで、二重点を円滑化するものも考える。すると、射影像からは二重点の4乗個のダイアグラムが得られるようになり、現象が複雑になる。現在までに自明化数が1となる射影像の特徴づけに成功している。今後、自明化数が2となる射影像の特徴づけに取り組む予定である。これは、分子生物学などへの応用も期待される。

#### ・結び目の影の研究の推進

自明化数は、影からもとの結び目の結び目解消数を上から評価している。その視点に立つと、影から他の不変量の値を評価することも可能であるので、準ダイアグラムに対して不変量を定義し、研究を推進する。これも影の情報からもとの結び目を読み取る必要がある分子生物学などへの応用も期待される。

#### ・正結び目の結び目解消数の研究を行う

結び目解消数の問題は解決されていないことが多い。そこで、正結び目に焦点を絞って研究を進める。正結び目の自明化数はその結び目解消数の2倍であるという予想の解決に向けて、正結び目に関する研究を進める。

空間グラフ理論や結び目理論という新しい数学を多くの人に知ってもらえるように、アウトリーチ活動も積極的に行っていく。また、学校教育への還元もなされるように、児童・生徒に向けた公開講座等も行う。

### 3. 研究の方法

「準ダイアグラムの研究の拡張」では、二重点を円滑化したものを考察する。研究の基盤として、二重点の個数が少ない影から具体的にどのような結び目や絡み目が出てくるかを考察し、表を作成することが大切である。他の拡張として、結び目や結び目の影で考えられていた半順序の関係を準ダイアグラムでも行う。これにも、先行研究に倣って、二重点の個数の少ない影から調べ上げ、表を作成することが求められる。これらは人手を要するため、大学院生とともに調べていく。

「結び目の影の研究の推進」は、今までに研究集会等で発表した内容をまとめていく。また、これにも上記の表を用いていく。

「正結び目の結び目解消数」に関しては、上記の2つの研究を推進していく中で、新た

な解決手法を見出していく。

アウトリーチ活動は、奈良教育大学の新理数プロジェクトを活用し、児童・生徒への指導の場を設けたり、科学館と連携しブースを出展したりしていく。

幅広い知見を得るために研究集会を開催し、大学院生にも広く発表の場を与えた。

平成 26 年 9 月 13 日(土)~15 日(月)

Workshop 2014 on Mathematics and Mathematical Education, 奈良教育大学, 世話役 花木良, 吉井貴寿

平成 27 年 8 月 30 日(日)~9 月 1 日(火)

Workshop 2015 on Mathematics and Mathematical Education, 奈良教育大学, 世話役 花木良, 吉井貴寿

平成 28 年 9 月 20 日(火)~9 月 21 日(水)

Workshop 2016 on Mathematics and Mathematical Education, 奈良教育大学, 世話役 花木良, 吉井貴寿

#### 4. 研究成果

研究代表者による「On scannable properties of the original knot from a knot shadow」では、次の定理が得られた。

$K_S = \{K \mid S \text{ は結び目 } K \text{ の影}\}$

任意の結び目の影  $S$  に対して、 $K_S$  には自明な結び目が含まれる。影から読み取る結び目の性質として次を定義する。

$c(S) = \max\{c(K) \mid K \in K_S\}$

$u(S) = \max\{u(K) \mid K \in K_S\}$

$g(S) = \max\{g(K) \mid K \in K_S\}$

$br(S) = \max\{br(K) \mid K \in K_S\}$

$b(S) = \max\{b(K) \mid K \in K_S\}$

$\sigma(S) = \max\{|\sigma(K)| \mid K \in K_S\}$

ここで、 $c(K)$ ,  $u(K)$ ,  $g(K)$ ,  $br(K)$ ,  $b(K)$ ,  $\sigma(K)$  は  $K$  の交点数, 結び目解消数, 種数, 組紐指数, 橋指数, 符号数を表し, 符号数は負もとるので絶対値をとっている。以後, 結び目の影  $S$  は, 非本質的な交点 (交点を取り除くと連結成分が増える) をもたないとする。不等式(1) より,  $2u(S) \leq tr(S)$  を得, 10 個以下の二重点をもつ結び目の影を調べ, 次を予想した。

予想 結び目  $K_p$  を  $S$  の二重点をすべて正の交点に変えた正ダイアグラムで表されるものとする,  $u(S) = u(K_p)$ ,  $2u(K_p) = tr(S)$  が成り立つ。

そして, 部分解答として, 組紐の閉包の形になっている結び目の影では上記が成り立つことを示した。また,  $u(S) = 1$  と  $u(S)$  が  $S$  の二重点の個数ひく 1 となる結び目の影の特徴づけを行った。交点数に関しては, 交代結び目の有名な性質から, 次の定理を得た。また,  $c(S) = c$  のとき  $c$  以下の任意の自然数  $c'$  に対して,  $c'$  を交点数にもつ結び目が存在するわけではない。例えば,  $7_1$  の 7 交点の結び目の影から交点数 6 の結び目は出てこない。他の不変量で, このような現象が起こるかはわかっていない。

定理 結び目  $K_a$  を  $S$  の二重点に上下をつ

けた交代 [alternative] ダイアグラムで表されるものとする,  $c(S) = c(K_a)$  が成り立つ。

種数に関しては, 次の定理を得て,  $g(S) = 1$  となる結び目の影の特徴づけをした。

定理 結び目  $K_h$  を  $S$  の二重点に上下をつけた等質 [homogeneous] ダイアグラムで表されるものとする,  $g(S) = g(K_h)$  が成り立つ。

組紐指数に関しては, ザイフェルト円周のようなものを考えることで不等式を得た。

また, 一般に  $br(K) \geq b(K)$  が成り立つので,  $br(S) \geq b(S)$  が成り立つ。

命題  $0(S)$  を  $S$  の二重点を向きに従って円滑化したときの円周の個数とすると,  $0(S) \geq br(S)$  が成り立つ。

符合数は正交点から負交点への交差交換で 2 増えるか変化しないことが知られているので, 次が成り立つ。また, Rasmussen 不変量についても同様の定理が成立する。

命題 結び目  $K_p$  を  $S$  の二重点をすべて正の交点に変えた正ダイアグラムで表されるものとする,  $\sigma(S) = \sigma(K_p)$  が成り立つ。

指導大学院生である田中遼氏の平成 26 年度修士論文「A partial order of knot shadows and pseudo diagrams」では, 準ダイアグラム  $Q$  に対し  $K(Q)$  を  $Q$  の二重点に上下の情報を与えて得られる結び目の集合と定義し,  $Q \leq Q'$  を  $K(Q) \subset K(Q')$  と定義し, 考察を行った。6 交点 (二重点を含む) 以下の準ダイアグラムのハッセ図を作成した。

指導大学院生である本村悠氏の平成 26 年度修士論文「A smoothing order of link shadows」では, 新たな視点で結び目 (絡み目) の影を考察した。従前では, 結び目の影の二重点に対して上下のみを考えていたが, この論文では, 交点を円滑化したものも考えている。実際, DNA の写真をみると, 接している可能性がある。6 交点以下の結び目と 5 交点以下の絡み目のハッセ図を得た。

アウトリーチ活動を 12 件行った。小学生向けの連続講座として科学体験プログラムを実施した。一般の人たちに結び目や空間グラフを知ってもらうためにそれらに応用した知恵の輪に関するブースを出展した。

#### 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 7 件)

- ① Ryo Hanaki, Trivializing number of knots, Journal of the Mathematical Society of Japan (2014), Volume 66, No. 2, pp. 435-447.  
<http://projecteuclid.org/euclid.jmsj/1398258179>

- ② Ryo Hanaki, On scannable properties of the original knot from a knot shadow, *Topology and its applications* (2015), Volume 194, pp. 296-305.  
<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0166864115003648>
- ③ 花木良 (他 5 名), 大学での数学学習における反転授業の導入に関する一考察 (との共著), 次世代教員養成センター研究紀要 第 1 号 (2015), pp. 351-354.  
<http://near.nara-edu.ac.jp/handle/10105/10379>
- ④ 西仲則博・花木良 (他 4 名) 教育実習生の数学授業における ICT を用いた授業力の育成に関する実践的研究, 次世代教員養成センター研究紀要 第 1 号 (2015), pp. 311-317.  
<http://near.nara-edu.ac.jp/handle/10105/10379>
- ⑤ 花木良・吉井貴寿, 数学科内容学における教材開発研究—線形代数学におけるパーフェクト・シャッフル教材—, 日本数学科内容学会誌 第 1 巻 第 1 号 (2015), pp. 77-84.  
<http://www.jsssce.jp/files-institute/jsssce-Vol1-No1.pdf>
- ⑥ 花木良, 数学科内容学の新たな役割—科学館展示を用いた数学の発信— (伊藤直治氏, 吉井 貴寿氏との共著), 日本数学科内容学会誌 第 2 巻 第 1 号 (2016), pp. 119-128.  
<http://www.jsssce.jp/files-institute/jsssce-Vol2-No1.pdf>
- ⑦ 荘司雅規・花木良 (他 4 名), ICT を用いた数学学習と教育実習生による ICT 活用に関する一考察, 次世代教員養成センター研究紀要 第 2 号 (2016), pp. 235-239.  
<http://near.nara-edu.ac.jp/handle/10105/10982>

〔学会発表〕 (計 14 件)

- ① 花木良・吉井貴寿, 置換を用いたパーフェクト・シャッフルの考察, 数学教育学会 2014 年度秋季年会, 広島大学, 2014 年 9 月 27 日.
- ② 花木良・井手内彩, 万華鏡を用いた算数・数学教材の開発, 日本教材学会第 26 回研究発表大会, 中京大学, 2014 年 10 月 19 日.
- ③ 吉井貴寿・花木良 (他 6 名), 科学館との連携を通じた算数・数学科教員養成の構想, 数学教育学会 2015 年春季年会, 明治大学, 2015 年 3 月 23 日.
- ④ 花木良・伊藤直治・吉井貴寿, 科学館展示を用いた数学科内容学, 日本数学科内容学会第 2 回研究大会, 聖徳大学, 2015 年 5 月 17 日.
- ⑤ 花木良 (他 11 名) 教員養成系大学による科学館における特別展, 日本科学教育学会第 39 回年会, 2015 年 8 月 23 日.

- ⑥ 花木良, On knot shadows, 研究集会「拡大 KOOK セミナー 2015」, 神戸大学, 2015 年 8 月 18 日.
- ⑦ 吉井貴寿, 花木良, 舟橋友香, 教科専門科目 (数学) における教材開発と授業研究の実践—線形代数学におけるパーフェクト・シャッフル教材—, 日本教材学会第 27 回研究発表大会, 東京学芸大学, 2015 年 10 月 10 日.
- ⑧ 花木良, 位相的な見方を用いた知恵の輪教材の開発—新しい数学を用いた空間図形教材—, 日本教材学会第 27 回研究発表大会, 東京学芸大学, 2015 年 10 月 11 日.
- ⑨ 花木良, 位相的な見方を用いた知恵の輪の演示や課題探究について, 直観幾何学の数学教育への有用性の研究, 京都教育大学, 2015 年 11 月 22 日.
- ⑩ 花木良, 結び目の影の研究, トポロジー金曜セミナー, 九州大学, 2016 年 2 月 4 日.
- ⑪ 花木良, 科学館を用いた幾何学の発信, RIMS 共同研究「直観幾何学を用いた数学教師に必要な数学能力開発の研究」, 京都大学数理解析研究所, 2016 年 7 月 20 日.
- ⑫ 花木良・後藤田洋介・吉井貴寿, 教員養成系大学による商業施設を利用した科学展示・演示, 日本科学教育学会第 40 回年会, ホルトホール大分, 2016 年 8 月 23 日.
- ⑬ 花木良, 結び目の影からわかる結び目の性質について, 日本数学会 2016 年度秋季総合分科会, 関西大学, 2016 年 9 月 18 日.
- ⑭ 花木良, 教育実習生による高校数学の教材研究について, 日本教材学会第 28 回研究発表大会, 盛岡大学, 2016 年 10 月 15 日.

〔図書〕 (計 1 件)

- ① 花木良, 「月刊うちゅう」の 2015 年 08 月号, 2015 年, 公益財団法人大阪科学振興協会 大阪市立科学館, pp. 4-9

〔産業財産権〕

- 出願状況 (計 件)  
なし
- 取得状況 (計 件)  
なし

〔その他〕

- アウトリーチ活動 (計 12 件)
- ① 万華鏡と数学, サイエンスフェア 2014, 岐阜県先端技術体験センター サイエンスワールド, 2014 年 7 月 27 日
- ② 立体図形の展覧会, 青少年のための科学の祭典 2014 奈良大会, 奈良教育大学, 2014 年 11 月 22 日
- ③ 知恵の輪をとこう!, けいはんな科学体験フェスティバル 2015, けいはんなプラ

- ザ, 2015年2月7日
- ④ 知恵の輪をところ, サイエンスフェア 2015, 岐阜県先端技術体験センター サイエンスワールド, 2015年7月26日
  - ⑤ 科学体験プログラム「知恵の輪の数理」, けいはんな科学コミュニケーション推進ネットワーク, 2015年7月27日, 8月24日, 9月27日, 10月25日
  - ⑥ 公開講座「数学的な見方をして 知恵の輪を創ろう!」, 奈良教育大学, 2015年9月13日
  - ⑦ 知恵の輪をところ!, 青少年のための科学の祭典 2015 奈良大会, 奈良工業高等専門学校, 2015年11月15日
  - ⑧ 知恵の輪をところ!, けいはんな科学体験フェスティバル 2016, けいはんなプラザ, 2016年2月6日
  - ⑨ 科学体験プログラム「知恵の輪の数理」, けいはんな科学コミュニケーション推進ネットワーク, 2016年5月21日, 6月18日, 7月9日, 8月6日
  - ⑩ ブロックを使って算数数学!, 青少年のための科学の祭典 2016 奈良大会, 奈良女子大学, 2016年11月20日
  - ⑪ 科学体験プログラム「知恵の輪の数理」, けいはんな科学コミュニケーション推進ネットワーク, 2016年12月3日, 12月24日, 1月7日, 1月21日
  - ⑫ 知恵の輪をところ!, けいはんな科学体験フェスティバル 2017, けいはんなプラザ, 2017年2月4日

## 6. 研究組織

### (1) 研究代表者

花木 良 (HANAKI, Ryo)  
奈良教育大学・教育学部・准教授  
研究者番号: 70549162

### (2) 研究分担者

なし

### (3) 連携研究者

なし

### (4) 研究協力者

吉井 貴寿 (YOSHII, Takatoshi)  
奈良教育大学・教育学部・准教授  
田中 遼 (TANAKA, Ryo)  
奈良教育大学 大学院  
本村 悠 (MOTOMURA, You)  
奈良教育大学 大学院  
藤井 勝也 (FUJII, Katsuya)  
奈良教育大学 大学院  
中野 真輝 (NAKANO, Masaki)  
奈良教育大学 大学院