

平成 30 年 6 月 11 日現在

機関番号：33919

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2014～2017

課題番号：26800046

研究課題名(和文) ノットコンタクトホモロジーの表現論的構造解析

研究課題名(英文) Representation theoretical analysis of the knot contact homology

研究代表者

長郷 文和 (Fumikazu, Nagasato)

名城大学・理工学部・准教授

研究者番号：30513634

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 2,000,000円

研究成果の概要(和文)：本研究は、ノットコンタクトホモロジーの表現論的構造解析を大きな目標としており、特に「Ng予想の完全解決」を目指すものである。まず、研究代表者の一連の研究から、Ng予想が成り立つための障害(幽霊指標)を発見した。この研究を基に、名城大学の鈴木心之助氏との共同研究では、この計算プログラムを構築し、その結果、トーラス結び目において、幽霊指標ならびにNg予想の反例を発見することができた。研究は現在も進展しており、その域は本研究課題を脱するような非常に深い部分に達している。

研究成果の概要(英文)：This project focuses on a representation theoretical mechanism relating the abelian knot contact homology and the character ring of the 2-fold branched cover of a 3-sphere branched along a knot. This relationship was conjectured by L. Ng, and it has been established by him for 2-bridge knots. In this project, we first introduced a new notion called a ghost character of a knot, which gives an obstruction for the conjecture to be true. Using it, in a joint work with Shinnosuke Suzuki, who was a graduate student at Meijo University, we found a counterexample of the conjecture for some torus knots. We are still researching this relationship to reveal the representation theoretical mechanism of the knot contact homology completely.

研究分野：低次元位相幾何学

キーワード：結び目 基本群 トレースフリー表現 指標多様体 コンタクトホモロジー 2重分岐被覆 幽霊指標

1. 研究開始当初の背景

(1) 近年、低次元トポロジーにおける「不変量のカテゴリー化」の枠組みは、特に、3次元多様体論や結び目理論において多くの革新をもたらしてきた。その枠組みから得られる不変量の性質は、多くの研究者によって活発に研究され、非常に深い部分まで整理された印象を受ける。

この「カテゴリー化」の最盛期の時代において、本研究課題の対象であるノットコンタクトホモロジー(knot contact homology)は、Duke University の L. Ng 氏によって「カテゴリー化」とは一線を画す幾何学的な結び目不変量として導入された。実際、3次元空間 R^3 内の結び目 K に付随する高次元多様体の接触構造を R^3 にコード(chord)として還元する形で導入されるこの(コ)ホモロジーは、「カテゴリー化」の枠組みから得られる不変量と異なる振舞いをするのがわかっている。従って、その性質を詳しく調べることで、「カテゴリー化」の枠組みの新たな研究視点、ならびに、「カテゴリー化」とは独立した新たな研究アイデアの発見が期待される。

この視点からノットコンタクトホモロジーを捉える際、まず注目すべきは、結び目 K に対し可換化されたノットコンタクトホモロジー $HC(K)$ が、3次元球面 S^3 の K に沿った2重分岐被覆の指標多様体 X の座標環と同型対応をもつという Ng 氏による予想(Ng 予想)である。

ここで、位相空間の指標多様体とは、位相空間の基本群を $SL(2, C)$ に表現したとき、その指標集合が満たす関係式の解として構成される複素空間内の代数的集合である。つまり、指標多様体の一点は表現の指標1つに対応する。このとき、代数的集合を定義域とする正則関数は座標環という環をなす。従って、 X 上の正則関数のなす環が可換ノットコンタクトホモロジー $HC(K)$ と同型になるという主張が Ng 予想である。

特に、2橋結び目に対し、Ng 予想が正しいことが Ng 氏自身によって示されており、指標多様体 X から可換ノットコンタクトホモロジーという幾何学的不変量が抽出される可能性があるという意味で、Ng 予想は非常に興味深い研究視点である。しかし、この同型対応がどのようなメカニズムで導かれるのかについては、本研究を始める時点では、一般には不明な状況であった。

(2) ノットコンタクトホモロジーは自明な結び目を識別する結び目不変量(unknotted detector)であることがわかっている。実は、自明な結び目の識別は「DNA 結び目に働く酵素」の位相幾何学的研究において非常に重要な研究課題である。例えば、細胞が分裂を起こす際、DNA は自身の複製をつくり分離する。このとき、もし DNA が非自明な結び目になっていると、複製が元の DNA に絡んでしまい、分離できなくなってしまう。そこ

で、細胞内の酵素があるメカニズムで DNA に働き、細胞分裂を起こす前に DNA 結び目を解く。つまり、位相幾何学的に見れば、DNA 内の酵素は結び目の unknot detector の役割を果たしているということになる。

この視点から本研究のより広い分野や社会への波及効果を考えると、結び目のある種の非自明な構造をこのホモロジーを通して調べることは非常に興味深く、学術的に重要性の高い研究として位置付けられる。

2. 研究の目的

本研究は、ノットコンタクトホモロジーの指標多様体を通じた表現論的構造解析を大きな目的としており、特に「Ng 予想の完全解決」を目指すものである。

またこれにより、自明な結び目を識別するノットコンタクトホモロジーの仕組みを完全に解析し「研究開始当初の背景(2)」に述べたような波及効果を促すことも目的の1つである。

3. 研究の方法

研究手法の開発のため、研究代表者によって深く考察されていた「結び目外部空間の指標多様体のトレースフリー断面 $S(K)$ 」を用いて、ノットコンタクトホモロジーを捉え直すことを試みた。実際、このアイデアは非常に良く機能することがわかっており、2橋結び目の場合には、完全に Ng 予想の表現論的別証明を与えることが以前よりわかっていた。

以下に、手法の概略を述べる。まず、可換ノットコンタクトホモロジー $HC(K)$ と座標環との対応を、その双対をとることで、代数的集合の対応として見るができる。即ち、 $HC(K)$ の双対空間として現れる代数的集合を $F_2(K)$ と表わすと、 X と $F_2(K)$ が代数的集合として同型になる。このとき、トレースフリー断面 $S(K)$ の幾何構造に注目すると、一般に、 $S(K)$ は $F_2(K)$ を底空間とする2重分岐被覆の構造をもっているということが、研究代表者の以前の研究によりわかっていた。

また、トレースフリー断面 $S(K)$ は、一般に、 S^3 の K に沿った2重分岐被覆の指標多様体 X を底空間とする2重分岐被覆構造をもつことも、秋田大学の山口祥司氏との共同研究でわかっていた。

実は、2橋結び目の場合、この2つの2重分岐構造が退化し、可換ノットコンタクトホモロジーの双対空間 $F_2(K)$ と指標多様体 X は同型になる。この同型対応が、Ng 予想で述べられている同型対応の、2橋結び目に対する同値な言い換えである。

任意の結び目に対して、この構造をうまく適用し、Ng 予想の同型対応を導ける場合と、導けない場合の本質的な違いを調べ、そこから予想が成り立つための障害を発見し、Ng 予想の反例がないか確かめるという工程(program)を本研究の手法とした。

4. 研究成果

まず、研究代表者の一連の研究から、Ng 予想が成り立つための障害（幽霊指標）を発見した。これは、底空間を $F_2(K)$ とするトレースフリー断面 $S(K)$ の 2 重分岐被覆構造において、 $S(K)$ の射影の像にならない $F_2(K)$ 上の点として定義される。つまり、幽霊指標は、幾何学的な立場から見れば、トレースフリー断面 $S(K)$ の 2 重分岐被覆構造をある意味で崩壊させる $S(K)$ からは見えない（ghost）点であり、結び目外部空間の基本群の $SL(2, \mathbb{C})$ -表現の立場から見れば、偽物（fake）の指標として捉えられる対象である。この幽霊指標がある場合、ある条件を満たせば、Ng 予想に述べられている同型対応が成立しないことが証明される。

この研究を基に、名城大学の鈴木心之助氏との共同研究では、トレースフリー断面 $S(K)$ ならびに幽霊指標の計算プログラムを構築し、多くの結び目において計算機実験を行った。

その結果、トーラス結び目において、幽霊指標ならびに Ng 予想の反例を計算機実験により発見することに成功し、実際に、その数学的証明を与えた。その一方で、10 交点以下の全ての結び目を含む無限個の結び目について、Ng 予想が成立することも数学的に証明することができた。従って、トーラス結び目以外の結び目では、Ng 予想が成立する可能性も残っている。この視点から、更なる計算機実験を行い、トーラス結び目以外にも、幽霊指標をもつ結び目を発見することに成功した。現在、この結び目が Ng 予想の反例になるか、計算機実験を進めているところであるが、結び目の複雑さから、その計算機実験は、現時点では困難を極めている。

上記のように、可換ノットコンタクトホモロジーと指標多様体との関係を示唆する（Ng 予想の）表現論的メカニズムは、トレースフリー断面を通してほぼ完全に解析することができた。これらの一連の成果については、arXiv へ 3 編の論文を投稿し、国際研究集会等での発表を行った。

一方で、Ng 予想の障害として導入された幽霊指標については、計算機実験から、その存在を確認することはできているが、結び目のどのような幾何学的性質に由来して現れるのかについては、未だ謎が多い。この幽霊指標に関する研究は現在も進展しており、その域は本研究課題を脱するような非常に深い部分に達していると推測される。

5. 主な発表論文等

（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計 2 件）

Fumikazu Nagasato, Masaaki Suzuki and

Anh T. Tran, On minimality of two-bridge knots, International Journal of Mathematics, Vol. 28, No.3 2017, 11pp (査読有)。

Fumikazu Nagasato and Anh T. Tran, Some families of minimal elements for a partial ordering on prime knots, Osaka Journal of Mathematics, Vol 53, No.4, 2016, pp.1029-1045 (査読有)。

〔学会発表〕（計 14 件）

Fumikazu Nagasato and Shinnosuke Suzuki, Trace-free characters and abelian knot contact homology (On Ng's conjecture from ghost characters of a knot), International conference "The 2nd Pan-Pacific International Conference on Topology and Applications", 2017 年 11 月 14 日, 釜山, 韓国。

長郷 文和, 鈴木 心之助, $_1(2K)$ 固有の $SL(2, \mathbb{C})$ -表現と Ng 予想の反例について, 第 8 回東名古屋数学若手研究会, 2017 年 6 月 17 日, 名城大学。

Fumikazu Nagasato and Shinnosuke Suzuki, On a special $SL(2, \mathbb{C})$ -representation of $_1(2K)$, International conference "The 12th East Asian School of Knots and Related Topics", 2017 年 2 月 13 日, 東京大学。

Fumikazu Nagasato and Shinnosuke Suzuki, Ghost characters, character varieties and abelian knot contact homology, International conference "The 12th East Asian School of Knots and Related Topics", 2017 年 2 月 13 日, 東京大学。

長郷 文和, 鈴木 心之助, $_1(2K)$ 固有の $SL(2, \mathbb{C})$ -表現と Ng 予想の反例について, 研究集会「結び目の数学」, 2016 年 12 月 23 日, 日本大学。

Fumikazu Nagasato and Shinnosuke Suzuki, Ghost characters, character varieties and abelian knot contact homology, International conference "Fundamental Groups, Representations and Geometric Structures in 3-manifold Topology", 2016 年 11 月 21 日, 広島大学。

長郷 文和, 鈴木 心之助, 結び目に沿って分岐する 3 次元球面の 2 重分岐被覆

の基本群の $SL(2, \mathbb{C})$ -表現について, 研究集会「トポロジーとコンピューター2016」, 2016年10月29日, カレッジプラザ, 秋田.

長郷 文和, 幽霊指標, 指標多様体と可換ノットコンタクトホモロジー, 研究集会「トポロジーとコンピューター2016」, 2016年10月29日, カレッジプラザ, 秋田.

Fumikazu Nagasato and Shinnosuke Suzuki, On the $SL(2, \mathbb{C})$ -representations of the fundamental group of the 2-fold branched covering of 3-sphere branched along a knot, International conference “KOOK-TAPU Workshop of Knots in Tsushima Island”, 2016年9月6日, 対馬市交流センター, 長崎.

Fumikazu Nagasato and Shinnosuke Suzuki, Ghost characters, character varieties and abelian knot contact homology, International conference “KOOK-TAPU Workshop of Knots in Tsushima Island”, 2016年9月6日, 対馬市交流センター, 長崎.

長郷 文和, On ghost characters of knot groups, 研究集会「2016 琉球結び目セミナー」, 2016年2月21日, 那覇市伝統工芸館.

Fumikazu Nagasato, On some families of minimal elements for the partial ordering on prime knots, International conference “The 10th East Asian School of Knots and Related Topics”, 2015年1月27日, East China Normal University.

長郷 文和, On some families of minimal elements for the partial ordering on prime knots, 研究集会「東北結び目セミナー」, 2014年10月19日.

長郷 文和, On $SL(2, \mathbb{C})$ -ghost characters of knots, 研究集会「2014 琉球結び目セミナー」, 2014年6月21日~6月22日, 那覇市伝統工芸館.

〔図書〕(計 0件)

〔産業財産権〕

出願状況(計 0件)

取得状況(計 0件)

〔その他〕

ホームページ:

<https://ccmath.meijo-u.ac.jp/~fukky/>

6. 研究組織

(1) 研究代表者

長郷 文和 (NAGASATO, Fumikazu)

名城大学・理工学部・准教授

研究者番号: 30513634

(2) 研究分担者

(3) 連携研究者

(4) 研究協力者