様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９－１、Ｚ－１９　（共通）

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 ２９ 年　 ６ 月 ２７ 日現在

機関番号：１８００１
研究種目：若手研究(B)
研究期間：2014～2016
課題番号：２６８０００６１

研究課題名（和文）特異性を持つウィーナー汎関数の確率解析

研究課題名（英文）Stochastic analysis for singular Wiener functional

研究代表者
林　正史（Hayashi, Masafumi）

琉球大学・理学部・助教

研究者番号：９０５３２５４９

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　1,900,000円

研究成果の概要（和文）：制御問題などに現れる確率微分方程式は、その係数がしばしば不連続になる。このような確率微分方程式の解は従来の解析の手法では、その性質を調べることが困難である。また境界条件のある確率微分方程式の解も従来の手法を用いることが難しい。本研究では、このような従来の手法を直接適応することが困難な確率微分方程式の解を対象に、解析の手段を提案することを目的とした。研究成果として低次元の確率微分方程式の解については、その密度関数を持つための十分条件を与えることができた。また、パラメトリクスの手法を適応することで境界条件付き確率微分方程式の解と、その局所時間の組の分布についても、具体的な表現を与える公式を示した。

研究成果の概要（英文）：Stochastic differential equations with singular coefficients often appear as solutions to stochastic control problem. It is difficult to investigate such a stochastic differential equation because of its singularity. Analysis for Stochastic differential equations with boundary conditions have also similar problems.
In this research, we have tried to establish a method to investigate such stochastic differential equations with singularity. We have obtained two main results: first we have given sufficient conditions where the distribution of the solution to stochastic differential equation with singular drift admit a transition density. We also see the Holder continuity of the transition density in space variable. Second, by using parametrix methods, we have obtained a representation formula for the distribution of the coupled solution to stochastic differential equations with reflecting boundary condition.

研究分野：確率論

キーワード：確率解析　マリアバン解析　確率微分方程式

１．研究開始当初の背景
確率微分方程式は自然科学、社会科学の様々なモデルを記述するために用いられている。そのため、分布の絶対連続性や、密度関数の評価、シミュレーションの方法といった様々な研究が行われている。これらの研究の多くは確率微分方程式の係数が滑らかであることを仮定している。一方で応用上は係数が滑らかでない確率微分方程式がしばしば現れる。例えば確率制御問題や最適化問題などの解は係数が不連続なものが現れる。また適当な可積分性のある確率変数が与えられたときに、その確率変数と同分布になるような確率微分方程式の解を構成する手法はMimicking と呼ばれ、統計学への応用の観点から近年活発に研究されているが、この分野においても係数が不連続な確率微分方程式が現れる。このような係数が不連続であるような確率微分方程式については、その特異性から従来のマリアバン解析などの手法を適用することが難しい。また、境界条件付きの確率微分方程式や、到達時刻確率過程の最大値などの確率変数も応用上、非常に重要であるが、このような確率変数もマリアバン解析などの従来の解析の手法を用いて分布の滑らかさの研究などを進めることは難しい。そこで、新しい解析の手法がさまざまな研究者によって提案されていた。

２．研究の目的
本研究の目的は上述したような特異性がある確率変数に対する解析の手法を提案し、いくつかの具体的な例で分布の絶対連続性や、密度関数の滑らかさについて研究を行うことである。

３．研究の方法
測度変換とパラメトリックスを用いる方法の二通りの手法で研究を行った。とくに、係数が不連続な確率微分方程式の解については、測度変換の手法を用いた。また、境界条件付き確率微分方程式の解については、その解と局所時間の組に対して、パラメトリックスの手法を適応することを考えた。

測度変換の手法ではドリフト項が不連続であるような確率微分方程式を考えた。ギルサノフの定理により、不連続なドリフト項を取り除くことが出来る。このドリフト項を取り除いた確率微分方程式の解については密度関数の存在など従来の手法を適応することが出来る。一方で、ラドンニコディム微分に不連続なドリフト項が現れる。このラドンニコディム微分の特異性が（不連続なドリフト項を取り除いた）確率微分方程式にどのような影響を与えるかを調べることで、不連続なドリフト項をもつ確率微分方程式の解析を行った。

パラメトリックスの手法はもともと偏微分方程式の解の構成のために Levi によって提案されたものである。近似的な逆作用素が満たす積分方程式から基本解の級数表現を与えることで、解の構成をするのである。近年はこの基本解の級数表現に現れる項を確率論的に表現しなおすことで、確率微分方程式に対応する半群の級数展開を与え、モンテカルロ法によるシミュレーションへ応用するといった研究が様々な研究者によってなされている。本研究では、この手法を境界条件付きの確率微分方程式に応用してその半群や、密度関数の表現公式を与え、シミュレーションを行った。

４．研究成果
係数が不連続な確率微分方程式の解については測度変換を用いて、密度関数が存在するための十分条件を与えた。また、弧の十分条件の下では、密度関数がヘルダー連続性も持つことが示せた。研究の方法のところでも述べたように、ギルサノフの定理を用いて解析を行った。特に、特異なドリフト項を持つ確率微分方程式の解の特性関数を評価する際に、ギルサノフの定理を用いて特異なドリフト項を取り除くのであるが、ラドンにコディム微分に不連続なドリフト項が現れることが問題となる。そこでラドンニコディム微分を確率テイラー展開して、得られる各項の期待値の計算を精密に評価する必要があった。ラドンニコディム微分の各項は多重ウィーナー積分を用いて表されるため、多重ウィーナー積分と特性関数に現れる指数関数との内積（二乗か積分確率変数がなすヒルベルト空間の内積）を工夫して計算した。特に多重ウィーナー積分の項が、マリアバンの意味での微分の共役作用となっていることから、部分積分の公式を用いて特性関数の無限遠点での退化のオーダーを評価した。このことによって、特性関数が重みを付けた二乗可積分空間に属することが分かり、ソボレフ空間の一般論を用いることによって、ドリフト項が不連続である確率微分方程式の解の分布が密度をもつための十分条件をあたえることができた。
この結果は論文としてすでに掲載されている。

この結果の良い点としては密度関数が空間全体で存在し、ヘルダー連続であることが示せる点である。一方でこのような大域的な結果が得られる代わりに、我々が与えた十分条件の制約は非常に強くなってしまった。この点が課題として残された。特に 1 次元、2 次元ではドリフト項が不連続な確率微分方程式で、我々が与えた十分条件を満たす例を挙げることが出来るが、3 次元以上の確率微分方程式で、我々が与えた十分条件を満たすものは、係数が連続なものに限られてしまうことが分かった。特性関数の可積分性という、大域的な性質を示すため、強い制約が必要となってしまったのである。Benes，Shepp and

Witsenhausenらの研究では1次元確率微分方程式でドリフト項が原点で不連続なものを扱っており、密度関数の具体的な表現を与えている。その密度関数は原点を除いて微分可能であるが、原点では微分不可能（原点で右微分、左微分は存在するが一致しない）ことがわかる。高次元の確率微分方程式の解の分布についても、このような局所的な密度の存在や滑らかさの議論をすることが一つの課題として残った。

境界条件付き確率微分方程式については、非負値の確率微分方程式で、原点では反射の境界条件をつけたものを扱った。この確率微分方程式に対応する半群のパラメトリックスを用いた表現公式と、解の密度関数の表現公式を与え、さらにそのシミュレーションを行った。この結果は紀要論文として発表されることが決定している。

また、その解と局所時間を組にした場合の分布についての表現公式についても研究を行った。確率微分方程式の解の出発点が正の領域にある場合、解が原点に始めて到達するまでは局所時間は0に留まる。そのため、解と局所時間を組にしてできる確率過程の任意の時刻での分布は得意になることが分かる。従来のパラメトリクスを用いた手法の多くは、確率微分方程式の解について推移密度関数が存在することが想定されている。本研究で得た結果の特徴的な点は、局所時間の特異性も含めて分布の表現公式を与えたという点である。もっとも素朴なスカラハード方程式の解からも推察できるように、原点で反射条件を付与した境界条件付き確率微分方程式の解の推移密度関数は、原点に到達した瞬間に消滅してしまう部分と、原点から出発する境界条件付き確率微分方程式の分部に分解される。原点に到達した瞬間に消滅する部分の分布は、局所時間について特異性（ディラックのポイントマス）を持っているが、確率微分方程式の解については絶対連続となっている。また、原点から出発する境界条件付き確率微分方程式の分部は局所時間も含めて絶対連続になっていることが期待できる。実際我々は、係数について比較的一般的な条件の下で、パラメトリックスの手法を用いることで、確率微分方程式の解と局所時間の組の任意の時刻での分布が、上述の２つの部分に分解できることを示し、これら２つの分部それぞれの推移密度に対して表現公式をあたえた。この公式は級数展開の形になるが、原点を除き一様に収束することが分かる。また、2 つの推移密度関数それぞれについて、初期値に関する微分可能性を示すことが出来た。この結果は現在、論文にまとめて投稿の準備を進めている。

この研究では、密度関数の初期値に関する微分可能性を示すことが出来たが、密度の変数についての微分可能性を示すことまでは出来なかった。これは、係数について「拡散係数はヘルダー連続で、有界かつ非退化」としており、また「ドリフト項については有界可測」という条件のみを仮定しているためであり、この条件をもう少し制限することで、確率微分方程式の解だけでなく、局所時間についても連続性や微分可能性を示すことが可能になると予想できる。この点は今後の課題として残されている。

５.発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計　2 件）
① M.Hayashi, A.Kohatsu-Higa, G.Yuki, “Holder continuity property of the densities of SDEs with singular drift coefficients”, Electronic journal of probability, vol.19.no.77,2014（査読有り）
② A.Alfonsi,M.Hayashi,A.Kohatsu-Higa, ”Parametix methods for one dimensional SDE’s with reflecting boundary conditions”, 論文集「Modern Problems of Stochastic Analysis and Statistics -Frestschrift in Honor of Valentin Konakov」に紀要論文として掲載予定（査読有り）

〔学会発表〕（計　2　件）
① 神戸 Workshop 格子状の確率解析とその周辺, 2015 年 3 月 18 日, 神戸大学理学部(兵庫県神戸市)
② 第５回数理ファイナンス合宿型セミナー,2015 年 11 月 7 日, クロスウェーブ府中(東京都府中市)

〔図書〕（計　　0 件）

〔産業財産権〕

○出願状況（計　0　件）

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
出願年月日：
国内外の別：

○取得状況（計　0　件）

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
取得年月日：
国内外の別：

〔その他〕
ホームページ等
　　　　なし

６．研究組織

(1)研究代表者
　林　正史（HAYASHI，Masafumi）
　琉球大学,理学部，助教
　研究者番号：90532549

(2)研究分担者
　　　　なし　　　（　　　）

　研究者番号：

(3)連携研究者
　　　　なし（　　　）

　研究者番号：

(4)研究協力者
　　　　なし（　　　）