

令和 3 年 5 月 24 日現在

機関番号：12601

研究種目：基盤研究(A) (一般)

研究期間：2015～2019

課題番号：15H02050

研究課題名(和文) p進perverse層と基本群のp進表現の研究

研究課題名(英文) Study on p-adic perverse sheaves and p-adic representations of fundamental groups

研究代表者

辻 雄 (TSUJI, Takeshi)

東京大学・大学院数理科学研究科・教授

研究者番号：40252530

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 17,100,000円

研究成果の概要(和文)：p進perverse層のp進Hodge理論，p進Simpson対応，Lubin-Tate拡大の局所岩澤理論および，整p進Hodge理論について研究した．単純正規交叉因子にstratificationを持つ p進perverse層についての比較定理，局所p進Simpson対応の数論的基本群の表現での類似，Lubin-Tate拡大の局所岩澤理論における多変数明示的相互法則の予想(表現についての条件つき)の定式化，Bhatt-Morrow-Scholzeの整p進Hodge理論の係数理論としての相対Breuil-Kisin-Fargues加群の理論の構築などの結果を得た．

研究成果の学術的意義や社会的意義

数体上の代数多様体のエタールコホモロジーとして得られるガロア表現は，数論幾何学の研究における基本的な道具の一つである．p進Hodge理論は，微分形式や微分方程式を足がかりとして，このガロア表現から数論的情報を取り出す有効な手段を与えている．本研究では，このp進Hodge理論の適用範囲を拡大(局所系からperverse層へ，円分拡大からLubin-Tate拡大へ)あるいは精密化(有理係数から整係数へ)する成果を得た．

研究成果の概要(英文)：We studied p-adic Hodge theory for p-adic perverse sheaves, p-adic Simpson correspondence, local Iwasawa theory for Lubin-Tate extensions, and integral p-adic Hodge theory. We obtained a comparison theorem for p-adic perverse sheaves with the stratification along a simple normal crossing divisor, an analogue of local p-adic correspondence for arithmetic fundamental group, and a formulation of a conjecture on multivariable explicit reciprocity law in local Iwasawa theory for Lubin-Tate extensions (under certain restrictions on Galois representations). We also developed a theory of relative Breuil-Kisin-Fargues modules as coefficients of the integral p-adic Hodge theory of Bhatt-Morrow-Scholze.

研究分野：数論幾何学

キーワード：p進Hodge理論 p進Simpson対応 p進表現 整p進Hodge理論 (,)加群

様式 C - 19、F - 19 - 1、Z - 19 (共通)

1. 研究開始当初の背景

(1) p 進 perverse 層の p 進 Hodge 理論

2014 年度までの研究により、p 進体上の良い還元をもつ固有非特異代数多様体上の単純正規交叉因子に伴う stratification についての crystalline エタール p 進 perverse 層の理論とコホモロジーの比較を stratum 上の log p 進局所系へ帰着する方法が与えられ、コホモロジーの比較定理の証明に向けて最後のステップが残されるのみとなっていた。

(2) 局所 p 進 Simpson 対応

p 進 Simpson 対応は, Faltings の 2005 年の短い論文(16 ページ)でその定式化が与えられた。Ahmed Abbes 氏, Michel Gros 氏と研究代表者により、それぞれ独自の新しい手法を導入しつつ、理論の基礎づけがなされた(この結果は 2016 年に本として出版された。)また有理局所 p 進 Simpson 対応における small 一般化表現から small Higgs 束の構成について, Faltings の論文の構成にはギャップがあることが Abbes-Gros により指摘されていた。半安定還元をもつ環の場合に、研究代表者が Sen の理論を用いる異なるアプローチによりこの構成を与えた。p 進 Simpson 対応は有理係数でも整係数でも成り立つが、整係数では素朴なコホモロジーの比較は成り立たず、コホモロジーの比較は有理係数のみでなされていた。

(3) Lubin-Tate 拡大の多変数局所岩澤理論

円分拡大の(,) 加群を用いた局所岩澤理論は Cherbonnier-Colmez による過収束性定理をその基礎として確立された。この Lubin-Tate 拡大での類似については Kisin-Ren, L. Berger, P. Colmez などによる研究があった。Lubin-Tate 拡大ではガロア群の階数が 1 より大きくなることに伴って、多変数の理論が構築されることが望ましい。しかしながら、局所岩澤理論の基本定理といえる明示的相互法則の多変数版は、自明な表現な場合の研究代表者の 2004 年の論文以降進展がなかった。一方 2010 年代に入ってから、Berger による多変数 Lubin-Tate(,) 加群の理論や、Berger-Fourquaux による F 解析的表現の過収束性の証明や 1 変数明示的相互法則の一形式化とその証明などの進展が見られた。

(4) 整 p 進 Hodge 理論

良い還元をもつ代数多様体の整 p 進エタールコホモロジーを de Rham コホモロジー、クリスタリンコホモロジーを用いて捉える方法として、p 進体の絶対ガロア群や p 進体上の代数多様体の基本群の Z_p 表現についての Fontaine-Laffaille 理論およびその相対版(Faltings の理論)が知られていた。これは de Rham コホモロジーの Hodge filtration の長さが素数 p より小さい場合にのみ適用できる理論であった。一方、Hodge filtration の長さの制限なしで、整 p 進エタールコホモロジーとして現れる絶対ガロア群の表現の構造を調べる方法として、Breuil-Kisin 加群や Fargues 加群の理論が知られていたが、これらの加群のコホモロジー的構成は与えられていなかった。また基本群の表現についての Breuil-Kisin 加群や Fargues 加群の理論(相対版)の研究はなかった。

2. 研究の目的

本研究では、係数が局所系でない場合や代数多様体の還元が半安定より悪い場合、コホモロジーの次数が素数 p より大きい場合の整 p 進エタール・コホモロジーなど、p 進 Hodge 理論が十分には確立していない領域で、理論の拡充を目指す。定数係数の場合、コホモロジーの次数が素数 p より大きい場合の p 進 Hodge 理論について、最近 Bhatt-Morrow-Scholze による A_{inf} コホモロジーを用いた画期的な進展がみられた。同理論の係数付きコホモロジーへの一般化を目指す。またこの係数理論と従来の crystalline p 進エタール局所系、p 進 Simpson 対応や、標数 p における Simpson 対応の類似との関係について研究する。

3. 研究の方法

(1) p 進 perverse 層の p 進 Hodge 理論

2014 年度までの研究により、p 進体上の良い還元をもつ固有非特異代数多様体上の単純正規交叉因子に伴う stratification についての crystalline エタール p 進 perverse 層と filtration, Frobenius 付き数論的 D 加群の理論、およびそれらのコホモロジーの stratum 上の log 局所系、log クリスタル(「nearby cycles 系」)を用いた記述を得ていた。これらを用いてコホモロジーの比較定理を示す。log 構造付きの stratum(log smooth ではない)でのコホモロジーの比較に帰着する。

(2) 局所 p 進 Simpson 対応

2014 年度までの研究により、半安定還元を持つ環に対する有理局所 p 進 Simpson 対応(を完成させていた(1)(2)参照)。この証明は、半安定還元の場合 log 座標と log 構造の関係が具体的にかけることに依存していた。log smooth な環へ一般化するには、log 座標と log 構造を定めるモノイドの整構造のずれを具体的に記述によらずにコントロールする手段を見出すことが鍵となる。small 一般化表現に対応する Higgs 束の構成は、幾何的基本群の一般化表現についての Sen の理論(smooth な環の場合は Brinon-Andreatta の先行研究あり)が鍵となっていた。従って数論的基本群の一般化表現について p 進 Simpson 対応の類似の研究においても、Sen の理論の構

築が Higgs 束構成の鍵となる．Sen の理論を用いて構成した対応が log 座標に依存しないことも示す必要がある．これについては 2014 年度までの研究で確立した周期環を用いる手法の類似を構築する．整局所 p 進 Simpson 対応におけるコホモロジーの比較の研究は，Bhatt-Morrow-Scholze の A_{inf} コホモロジー論で鍵となった「ずらし操作」をガロアコホモロジーに施すという Morrow 氏のアイデアに基づく．座標に依存した同型の構成は容易である． p 進 Simpson 対応の構成で導入した周期環を用いることにより，座標によらない別の構成法を与える点が核心である．

(3) Lubin-Tate 拡大の多変数局所岩澤理論

Lubin-Tate(,) 加群を「Lubin-Tate 形式群の法 p 還元の普遍変形空間」へ持ち上げるという Laurent Berger 氏のアイデアを出発点とする．この持ち上げを用いて， p 進ガロア表現の多変数局所岩澤理論研究の新たな枠組みを構築するためには， p 進ガロア表現の岩澤加群をこの持ち上げを用いて記述する必要がある．自明な表現の場合の研究代表者の過去の研究では普遍変形空間上での de Rham cohomology が用いられていた．Lubin-Tate(,) 加群の持ち上げも自然な可積分接続をもつため，その de Rham cohomology を用いて岩澤加群を捉えるのが基本的なアイデアである．この研究の一つの目標である多変数明示的相互法則の定式化のためには，Lubin-Tate(,) 加群の持ち上げについての付加的性質（過収束性や高さ有限性）も必要となる． F 解析的クリスタリン p 進表現については，対応する Lubin-Tate(,) 加群の高さ有限性（Wach 加群の存在）が知られている．その普遍変形空間への持ち上げを(4)で用いた手法を用いて構成する．Laurent Berger 氏と議論する機会を持つことにより，円分(,) 加群の明示的相互法則や Lubin-Tate(,) 加群の（別の手法による）多変数化などの研究に関する Laurent Berger 氏の専門知識と，crystalline コホモロジー，サントミックミックコホモロジーからのアプローチについての研究代表者の知識を融合させる．

(4) 整 p 進 Hodge 理論の係数理論

本研究の開始後，Bhatt-Morrow-Scholze が A_{inf} コホモロジーとよばれる新しいコホモロジー論を導入し，コホモロジーの次数の条件なしで整 p 進エタールコホモロジーを de Rham コホモロジー，クリスタリンコホモロジーと結びつけることに成功した．次数が p より小さい場合には，Faltings による係数理論（相対 Fontaine-Laffaille 理論）が知られていた．BMS の理論は定数係数の理論である．Faltings による係数理論が BMS の新しい枠組みでどのように捉えられるかを調べることにより，BMS の係数理論の定式化の可能性を探る．Faltings の整 p 進 Hodge 理論では A_{crys} 係数の一般化表現が現れており，一方 BMS 理論の A_{inf} コホモロジーは proetale site 上の層 A_{inf} （一般化表現の係数環とみることができる）のコホモロジーから構成されている．絶対ガロア群の p 進表現論における filtered 加群から Wach 加群の構成の相対版を考えることにより，上述の A_{crys} 係数の一般化表現から A_{inf} 係数の一般化表現を構成する．このようにして得られた A_{inf} 係数の一般化表現の性質や q 接続・接続・基本群の \mathbb{Z}_p 表現との関係を足がかりとして， A_{inf} コホモロジーの係数理論の適切な定式化を見出す．研究には， A_{inf} コホモロジー論で用いられた Scholze の proetale site に関する専門的知識は欠かせず，同コホモロジーの創始者の 1 人である Matthew Morrow 氏と共同で研究を行う．

4．研究成果

(1) p 進 perverse 層の p 進 Hodge 理論

2014 年度までの研究により， p 進体上の良い還元をもつ固有非特異代数多様体上の単純正規交叉因子に伴う stratification についての crystalline エタール p 進 perverse 層とそれに伴う filtration, Frobenius 付き数論的 D 加群の理論，およびこれらのコホモロジーの stratum 上の log エタール p 進局所系，filtered F -isocrystal（「nearby cycles 系」）を用いた記述が得られていた．これらの理論を総合することにより，crystalline p 進エタール perverse 層とそれに伴う filtration, Frobenius 付き数論的 D 加群のコホモロジーの比較定理の証明を完成した．これは p 進局所系についての Faltings の定理（crystalline 予想）の一般化となっている．

(2) 局所 p 進 Simpson 対応

2014 年度までの研究により，半安定還元を持つ環に対する有理局所 p 進 Simpson 対応が完成していた．この半安定還元を条件を log smooth に緩めても対応が成り立つことを示した．半安定還元という性質は一般にファイバー積で保たれないため，ファイバー積で保たれる log smooth な環への一般化は応用上重要である．

p 進 Simpson 対応は幾何的基本群の一般化表現と Higgs 束の対応に関する理論である． p 進体の絶対ガロア群の情報も含む数論的基本群の一般化表現について有理局所 p 進 Simpson 対応の類似を研究した．従来の幾何的基本群の理論ではすべての表現は扱えなかったが，数論的基本群の場合には，すべての一般化表現が，円分拡大のガロア群の作用をもつ冪零 Higgs 束のなす圏と圏同値になることを証明した．これは数論的基本群の p 進表現に関する R.Liu, X.Zhu の類似の研究に触発された研究である．

整 p 進 Simpson 対応では，整一般化表現と整 Higgs 束が（各対象が small であるという条件のもとで）対応するが，これらのコホモロジーの整構造を保つ比較はなされていなかった．整 p 進 Hodge 理論の係数理論の Morrow 氏との共同研究(項目(4)参照)において，整局所 p 進 Simpson

対応においては、ガロアコホモロジーに BMS の「ずらし操作」を施すことにより、整構造を保つ自然な比較同型が存在することが明らかになった。この同型の大域化は一般には成り立たず、その障害の解明が今後の課題である。

(3) Lubin-Tate 拡大の多変数局所岩澤理論 (Laurent Berger 氏との共同研究)

Lubin-Tate (,) 加群が Lubin-Tate 形式群の法 p 還元の普遍変形空間への自然な持ち上げをもつことを示した。Lubin-Tate (,) 加群に伴う p 進ガロア表現の岩澤加群の Lubin-Tate (,) 加群を用いた記述が最近 Schneider-Venjakob により得られていた。この記述も局所モジュライ空間へ持ち上がることも示した。

crystalline 表現のうち、とくに F 解析的なものは、対応する Lubin-Tate (,) 加群の中に Wach 加群とよばれる「整構造」をもつ。 F 解析的 crystalline 表現に伴う filtered 加群の filtration の長さについての条件つきで、この Wach 加群も普遍変形空間へ自然に持ち上がることを示した。(4) の忠実充満関手は Wach 加群の理論のある種の相対版となっており、この研究で開発した手法を援用することにより上記結果を得た。応用として、上でふれた filtration の長さの条件をみたく F 解析的 crystalline 表現について、多変数明示的相互法則の定式化 (まだ予想の段階) を得た。1 変数版については、でふれた Schneider-Venjakob のアプローチでの明示的相互法則の定式化と証明が、研究集会 Iwasawa 2017 で Venjakob によりアナウンスされている。多変数明示的相互法則の証明および同理論の一般の crystalline 表現への拡張が今後の課題である。

(4) 整 p 進 Hodge 理論の係数理論 (, , は Matthew Morrow 氏との共同研究)

p 進整数環上 smooth な環についての Faltings の整 crystalline 表現の理論と Bhatt-Morrow-Scholze により最近導入された新しい整 p 進 Hodge 理論の枠組みとの関係を明らかにした。具体的には (p -torsion を持たない) 整 crystalline 表現の圏から、BMS 理論における係数とみなせる Frobenius 付き small 一般化 A_{inf} 表現 (「相対 Breuil-Kisin-Fargues 加群」) の圏への忠実充満関手を構成した。さらに BMS 理論の基礎となっている「ずらし」ガロア・コホモロジーが、BMS の定数係数の場合の結果と同様、整 crystalline 表現に伴う可積分接続付き加群の de Rham 複体を復元することを示した。整 filtered F -crystal から整 crystalline 表現への関手の忠実充満性をこの新たな枠組みで捉えられることも明らかになった。

この研究では整 crystalline 表現に伴う相対 BKF 加群 M がフレーム付周期環 (考えている smooth 環の A_{inf} 上への座標付き持ち上げ) への降下 D を持つことが鍵であった。この降下が一般の相対 BKF 加群でも成り立つことを証明した。Faltings の p 進 Simpson 対応では small 一般化表現の類似の降下の存在が鍵となっており、Faltings の議論の small A_{inf} 一般化表現における類似を考えることにより上記結果を得た。この降下 D の存在により、一般の相対 BKF 加群 M についても、それに伴う可積分接続付き加群 D_{dR} 、特殊ファイバー上の F -crystal D_0 、基底 A_{crys} の filtered F -isocrystal D_{crys} が構成され、BMS の整 p 進 Hodge 理論における定数係数の局所理論が次のように相対 BKF 加群係数付きへ一般化された。相対 BKF 加群の「ずらし」ガロア・コホモロジー $A(M)$ は D に伴う q -deRham 複体と自然な擬同型を持ち、適当な係数拡大を通して D_{dR} , D_{crys} , D_0 および M に伴う幾何的基本群の \mathbb{Z}_p 表現のコホモロジーを復元する。Faltings の整 crystalline 表現は、Hodge filtration の長さに制約があった。 p -torsion free という条件が必要だが、この制約なしの係数理論 (相対 BKF 加群) が得られたことになる。

p 進数体の代数閉包の完備化の整数環 (より一般には perfectoid 体の整数環) 上の固有 smooth な形式スキーム X 上での の大域版を構築した。Scholze により X の生成ファイバー X_C の pro-etale site およびその上の層 A_{inf} が構成されていた。一般に局所有限生成自由な A_{inf} 層が X 上局所的に良い記述を持つかは不明だが、 の相対 BKF 加群の定義で課す A_{inf} 表現の smallness の大域版を A_{inf} 層で考えると、良い記述を持つことが示されたことが鍵となった。これにより の相対 BKF 加群は Frobenius 付き small A_{inf} 層として大域化された。

この局所理論について次の結果も得た。

(a) 平坦 q 接続付き加群の平坦 q -Higgs 加群への相対 Frobenius に沿った降下 (標数 p の Simpson 対応、非可換 Hodge 理論の類似)。

(b) Frobenius の傾きが区間 $[0, 1]$ に入る相対 BKF 加群の圏と p 可除加群の圏の圏同値の証明。 $p > 2$ を仮定する。Lau の半完全環上の Dieudonné 理論を相対 BKF 加群に伴う filtered F -crystal に適用する。

(c) 整 p 進 Hodge 理論の係数理論を与えると期待される別のアプローチとして Bhatt-Scholze による prism の理論がある。これに関し、基底環 A_{inf} のある種の収束性をみたく平坦 q 接続付きベクトル束の圏と基底環 A_{inf} の prismatic crystal の圏の間の圏同値を示した。特に Frobenius 付きでは、平坦 q 接続付きベクトル束、平坦 q -Higgs 束、prismatic crystal の間の圏同値が得られる。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計2件（うち査読付論文 2件 / うち国際共著 0件 / うちオープンアクセス 0件）

1. 著者名 Takeshi Tsuji	4. 巻 6
2. 論文標題 Crystalline Z_p -Representations and Ainf-Representations with Frobenius	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Simons Symposia	6. 最初と最後の頁 161 ~ 319
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/978-3-030-43844-9_6	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Takeshi Tsuji	4. 巻 371
2. 論文標題 Notes on the local p -adic Simpson correspondence	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Mathematische Annalen	6. 最初と最後の頁 795-881
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s00208-018-1655-2	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

〔学会発表〕 計13件（うち招待講演 12件 / うち国際学会 9件）

1. 発表者名 辻雄
2. 発表標題 Coefficients in integral p -adic Hodge theory via generalized Ainf-representations
3. 学会等名 p -adic cohomology and arithmetic geometry 2019 (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 辻雄
2. 発表標題 Coefficients in integral p -adic Hodge theory
3. 学会等名 Arithmetic Geometry in Carthage (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 辻雄
2. 発表標題 Coefficients in Integral p-adic Hodge Theory via Generalized Ainf-representations and q-connections
3. 学会等名 Simons symposium: p-adic Hodge theory (2019) (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 辻雄
2. 発表標題 (,)-modules and formal moduli for Lubin-Tate formal groups
3. 学会等名 Workshop on arithmetic geometry, Tokyo-Princeton at Komaba, the University of Tokyo (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 辻雄
2. 発表標題 The relative Fontaine-Laffaille theory and Ainf representations with Frobenius
3. 学会等名 Simons Symposium on p-adic Hodge Theory, Schloss Elmau, Kruen, Germany (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 辻雄
2. 発表標題 The relative Fontaine-Laffaille theory and Ainf representations with Frobenius
3. 学会等名 Algebraic K-theory and arithmetic, Polish Academy of Sciences Conference Center, Bedlewo, Poland (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 辻雄
2. 発表標題 The relative Fontaine-Laffaille theory and Ainf representations with Frobenius
3. 学会等名 p進コホモロジーと数論幾何学2, 東京電機大学 (招待講演)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 辻雄
2. 発表標題 Recent progress in integral p-adic Hodge theory
3. 学会等名 Tokyo-Lyon Conference in Mathematics, the University of Tokyo (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 辻雄
2. 発表標題 p進Simpson 対応
3. 学会等名 代数的整数論とその周辺, 京都大学数理解析研究所 (招待講演)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 辻雄
2. 発表標題 p進Simpson対応
3. 学会等名 日本数学会2017年度年会, 企画特別講演 (招待講演)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 辻雄
2. 発表標題 Notes on the local p-adic Simpson correspondence
3. 学会等名 p進コホモロジーと数論幾何学 (招待講演)
4. 発表年 2016年

1. 発表者名 辻雄
2. 発表標題 On p-adic etale cohomology of perverse sheaves
3. 学会等名 Geometrie arithmetique, theorie des representations et applications (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2015年

1. 発表者名 辻雄
2. 発表標題 On p-adic etale cohomology of perverse sheaves
3. 学会等名 2015 Summer Research Institute on Algebraic Geometry (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2015年

〔図書〕 計1件

1. 著者名 Ahmed Abbes, Michel Gros, Takeshi Tsuji	4. 発行年 2016年
2. 出版社 Princeton University Press	5. 総ページ数 616
3. 書名 The p-adic Simpson Correspondence	

〔産業財産権〕

〔その他〕

東京大学大学院数理科学研究科 研究成果報告書
<http://www.ms.u-tokyo.ac.jp/activity/annualreport.html>

6. 研究組織

氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
---------------------------	-----------------------	----

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計3件

国際研究集会 Arithmetic Geometry : l-adic and p-adic aspects	開催年 2018年～2018年
国際研究集会 Workshop on arithmetic geometry, Tokyo-Princeton at Komaba	開催年 2019年～2019年
国際研究集会 Iwasawa 2017	開催年 2017年～2017年

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関
---------	---------