

平成 31 年 5 月 2 日現在

機関番号：12601

研究種目：基盤研究(A) (一般)

研究期間：2015～2018

課題番号：15H02056

研究課題名(和文)作用素環論と数理物理学への応用

研究課題名(英文)Operator Algebras and their Applications to Mathematical Physics

研究代表者

河東 泰之 (Kawahigashi, Yasuyuki)

東京大学・大学院数理科学研究科・教授

研究者番号：90214684

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 30,800,000円

研究成果の概要(和文)：頂点作用素代数と作用素環の局所共形ネットはカイラル共形場理論を数学的に扱うための二つの枠組みであるが、これまで直接的な関係は見つかっていなかった。Carpi, Longo, Weiner と共に、強局所性という条件を付ければ、頂点作用素代数から局所共形ネットを構成することができ、この局所共形ネットから元の頂点作用素代数が復元できることを示した。さらに強局所性が成り立つための簡単な十分条件も示した。

また物質のトポロジカル相の数学的研究を作用素環論を用いて行った。特にgapped domain wallと、anyon系の研究を作用素環論の立場から行った。

研究成果の学術的意義や社会的意義

場の量子論は、時空と物質を記述する物理学の根本理論であるが、数学的な基礎づけは今も不十分であり、21世紀数学の重要な研究テーマである。場の量子論の特別な例であるカイラル共形場理論については、数学的理解がかなり進んできている。本研究ではそのうち二つの流儀が本質的に等価であることを示した。

また最近物理学で大きな注目を集めている物質のトポロジカル相について、数学的立場から研究を進めた。

研究成果の概要(英文)：We have two mathematical theories to study chiral conformal field theory. One is a theory of vertex operator algebras and the other is one of local conformal nets. The direct relations of the two was not known, but we have proved that one can construct a local conformal net from a strongly local vertex operator algebra and recover the original vertex operator algebra from the local conformal net, with Carpi, Longo and Weiner. We have also given a simple sufficient condition for strong locality.

We also studied topological phases of matter from an operator algebraic viewpoint. We studied gapped domain walls and anyon systems using operator algebras.

研究分野：作用素環論

キーワード：作用素環論 部分因子環 場の量子論 共形場理論 頂点作用素代数 モジュラーテンソル圏 トポロジカル相 エニオン

様式 C - 19、F - 19 - 1、Z - 19、CK - 19 (共通)

1. 研究開始当初の背景

作用素環と数理論理学の関係は von Neumann 以来の密接なものである。作用素環でフィールズ賞を取った Connes, Jones も数理論理学への応用を強く意識しており、これらの意味で作用素環と数理論理学の組み合わせというのはもっとも正統的な問題意識である。特に場の量子論と統計力学が中心的な役割を果たすが、この計画では共形場理論が最も重要な話題である。

カイラル共形場理論の研究においては、頂点作用素代数に基づく純代数的な研究が先行していたが、作用素環論に基づく局所共形ネットの理論も最近よく研究されていた。両者の間に密接な関係があることはよく知られていたが、二つの公理系間の正確な関係は理解されていなかった。これを理解し、両者の研究を作用素環論の立場から深めることが重要な課題となっていた。

2. 研究の目的

量子力学では観測可能量は自己共役作用素で表される。一方、古典的な場とは時空上の関数で表される。そこで場の量子論では量子場は時空上の作用素値超関数で表されることになる。その満たすべき数学的条件を公理化したものが Wightman の公理系であり、場の量子論の数学的研究は、これに基づく流儀のものが古くからよく知られている。それに対し、観測可能量の生成する作用素環の族を研究対象とする、代数的場の量子論と呼ばれる方法が 50 年ほど前に成立した。時空領域においてそこで観測可能な物理量を表す自己共役作用素たちを考え、それらの生成する作用素環を考える。これによって時空領域でパラメライズされた作用素環の族ができるが、これを数学的に公理化して研究することが基本的な方法である。時空対称性を表す群も考える必要があるが、この群の射影的ユニタリ表現が数学的データの一部に入ってくる。長い間、4 次元 Minkowski 空間で Poincare 群を考えた場合の研究が行われており、その進歩が速いとは言いが難しかったが、2 次元 Minkowski 空間の上で共形対称性を考えた共形場理論については、この 20 数年の間に大きな進展があった。これは数学の過半の分野と関係すると言っていいほどの大きなテーマであるが、作用素環論の立場からは、2 次元 Minkowski 空間を直積に分解した後コンパクト化して得られる 1 次元円周を「時空」と考え、その上の区間でパラメライズされた作用素環の族を数学的に研究することが主要な問題となる。この族は、物理的動機に基づくしかるべき公理系を満たすもので、局所共形ネットと呼ばれる。この局所共形ネットについて、例を作ったり、不変量を考察したり、分類したり、種々の条件の間関係を考察したりすることが数学的なテーマである。この理論が作用素環論において結び目の Jones 多項式を生み出した Jones の subfactor 理論と深い関係を持つことは、Longo によって 1980 年代末に明らかにされた。また subfactor 理論の解析的側面は Popa による進展がはなばなし。研究計画の欄にあるように、本計画ではこれら、Jones, Longo, Popa を海外共同研究者として、この理論の更なる発展を目指すものである。もともと我々日本のグループは、世界における subfactor 理論の中心的研究グループの一つであるので、これまでの蓄積をいかし、さらに研究を進展させていきたい。

3. 研究の方法

連携研究者、研究協力者(海外共同研究者)と共に作用素環論における分類理論と、その数理論理学、特に共形場理論への応用を世界最高水準で研究する。具体的には、海外共同研究者との相互訪問による共同研究、国際研究集会での招待講演への参加、国際研究集会や高木レクチャーをはじめとするイベントのオーガナイズ、海外研究者の招待などを通じて研究を実行する。最近の実績に基づく河東の海外出張は毎年 10 回近く、通算 4 か月近いものである。これらの多くの飛行機代と一部の滞在費、また海外・国内研究者の旅費に研究費を使用する。特に海外研究者の日本への招待について連携研究者と協力して実施にあたる。

本計画は連携研究者のほかに、研究協力者(海外共同研究者)として、次の 3 人を加えたグループで行う。

・Vaughan F. R. Jones (Vanderbilt 大学): Subfactor 理論を創始し、その応用として結び目の Jones 多項式を発見して Fields 賞を受賞。

・Roberto Longo (Rome 大学): 共形場理論の作用素環論的研究において最近 25 年間の研究をリードする第一人者。ローマに新設された数学・理論物理学研究センター所長。

・Sorin Popa (California 大学 Los Angeles 校): 作用素環の分類理論において、von Neumann 以来の歴史的難問を次々と解決して現在の発展のトップを独走する。ICM-2006 の全体講演者。

4. 研究成果

頂点作用素代数と(作用素環の)局所共形ネットはカイラル共形場理論を数学的に扱うための二つの枠組みであり、両者の間に様々な類似性は あるものの、これまで直接的な関係は見つかっていなかった。Carpi, Longo, Weiner と共に、強局所性という条件を付ければ 頂点作用素代数から局所共形ネットを構成することができ、この局所共形ネットから元の頂点作用素代数が復元できることを示した。さらに強局所性が成り立つための簡単な十分条件も示した。これは十数年来の懸案を解決するものである。さらに頂点作用素代数としての自己同型群と局所共形ネットとしての自己同型群が同じであることも示した。この結果は、(すでに河東自身の結果によって分かっていた)ムーンシャイン頂点作用素代数の場合を含め多くの例に適用できる。

物質のトポロジカル相の間の gapped domain wall というものが物性物理で研究されているが、その数学的定義を与え、2015 年の Lan, Wang, Wen の予想は正しくないことを示した。

完全有理的な局所共形ネット2つからできるフル共形場理論のカップリング行列 について、モジュラー不変性が成り立つのはフル共形場理論の表現論が自明な時であり、またその時に限ることが知られている。一方2つの局所共形ネットが同じ場合、モジュラー不変行列を二つかけてもモジュラー不変性が保たれることは自明であり、その分解規則はモジュラー不変行列のフュージョンルールとして知られている。これについては、Evans-Pinto, Fuchs-Runkel-Schweigert の研究があり、フル共形場理論と、カイラル共形場理論の局所的とは限らない拡大の関係に基づき、 Q -system の braided product としての解釈が知られている。この「テンソル積」とその直和分解の構成を、二つの局所共形ネットが同じとは限らない場合に一般化した。また物質のトポロジカル相の文脈では、これは gapped domain wall の合成にあたるものとなっている。

フュージョン圏におけるフル部分圏の Drinfel'd の意味での 相対可換子圏の単純対象、フュージョン圏のフル部分圏についての既約な半 braiding, Ocneanu の tube 環を一般化した相対 tube 環の極小中心射影の間の対応を確立した。これを用いて、 α -induction から生じるフュージョン圏 の相対 Drinfel'd 可換子圏を明示的に計算した。カイラル共形場理論から生じる具体例も示した。

さらにフュージョン圏におけるフル部分圏の Drinfel'd の意味での相対可換子圏の研究を続けた。特に相対チューブ環の部分環として相対トーラス環を定義し、その上で S 行列の作用を考えた。これについて相対 Verlinde 公式を証明した。これは、フル部分圏が全体に一致する場合には、通常の Drinfel'd 中心の Verlinde 公式であり、またフル部分圏が自明な場合には もともとのフュージョン則をそのまま書いたものである。したがって一般の場合にはこの両極端の間を「補間」したものになっている。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕(計8件)

[1] M. Bischoff, Y. Kawahigashi, R. Longo, Characterization of 2D rational local conformal nets and its boundary conditions: the maximal case, Doc. Math. 20 (2015), 1137-1184.

[2] Y. Kawahigashi, Conformal field theory, tensor categories and operator algebras, J. Phys. A 48 (2015), 303001 (57 pages).

[3] Y. Kawahigashi, A remark on gapped domain walls between topological phases, Lett. Math. Phys. 105 (2015), 893-899.

[4] M. Bischoff, Y. Kawahigashi, R. Longo, K.-H. Rehren, Phase boundaries in algebraic conformal QFT, Commun. Math. Phys. 342 (2016), 1-45.

[5] Y. Kawahigashi, A relative tensor product of subfactors over a modular tensor category, Lett. Math. Phys. 107 (2017), 1963-1970.

[6] S. Carpi, Y. Kawahigashi, R. Longo, M. Weiner, From vertex operator algebras to conformal nets and back, Mem. Amer. Math. Soc. 254 (2018), no. 1213, vi+85 pp.

[7] Y. Kawahigashi, The relative Drinfeld commutant of a fusion category and α -induction, to appear in Internat. Math. Res. Notices.

[8] Y. Kawahigashi, Conformal field theory, vertex operator algebras and operator algebras, to appear in Proceedings of ICM 2018.

〔学会発表〕(計34件)

[1] Y. Kawahigashi, From vertex operator algebras to local conformal nets and back, International Conference on Subfactor Theory in Mathematics and Physics, Qinhuangdao (China), July 2015.

[2] Y. Kawahigashi, From vertex operator algebras to operator algebras and back, Calabi-Yau Varieties: Arithmetic, Geometry and Physics, 津田塾大学 (Japan), August 2015.

[3] Y. Kawahigashi, From vertex operator algebras to operator algebras and back, Lie Algebras, Vertex Operator Algebras, and Related Topics, University of Notre Dame (U.S.A.), August 2015.

[4] Y. Kawahigashi, From vertex operator algebras to operator algebras and back, 作用

素論・作用素環論研究集会，妙高高原，2015年10月。

[5] Y. Kawahigashi, Subfactors and gapped domain walls between topological phases, *Noncommutative Geometry and Operator Algebras Spring Institute 2016, Universität Bonn (Germany), May 2016.

[6] Y. Kawahigashi, A relative tensor product of subfactors over a modular tensor category, Operator Algebras and Quantum Field Theory, Istituto Nazionale di Fisica Nucleare, Frascati (Italy), June 2016.

[7] Y. Kawahigashi, Relative tensor products of heterotic full conformal field theories, Recent Mathematical Developments in Quantum Field Theory, Oberwolfach (Germany), July 2016.

[8] Y. Kawahigashi, Subfactors, conformal field theory and modular tensor categories, Modular Categories--Their Representations, Classification, and Applications, Casa Matemática Oaxaca (Mexico), August 2016.

[9] Y. Kawahigashi, Conformal field theory and operator algebras, Statistics, Quantum Information and Gravity, IPMU (Japan), September 2016.

[10] Y. Kawahigashi, Topological phases and subfactors, Subfactors and Mathematical Physics, Tsinghua Sanya International Mathematics Forum (China), December 2016.

[11] Y. Kawahigashi, Subfactors, tensor categories and conformal field theory, Primer on subfactors and applications, Isaac Newton Institute for Mathematical Sciences (U.K.), January 2017.

[12] Y. Kawahigashi, The relative Drinfeld commutant and alpha-induction, Subfactors, K-theory and conformal field theory, Isaac Newton Institute for Mathematical Sciences (U.K.), June 2017.

[13] Y. Kawahigashi, The relative Drinfeld commutant of a fusion category and alpha-induction, 作用素環論の最近の進展, 京大数理研, September 2017.

[14] Y. Kawahigashi, Conformal field theory, operator algebras and vertex operator algebras, Advances in Mathematics and Theoretical Physics, Rome (Italy), September 2017.

[15] Y. Kawahigashi, Conformal field theory and operator algebras, Reflection Positivity, Oberwolfach (Germany), November 2017.

[16] Y. Kawahigashi, 頂点作用素代数と作用素環の表現論, 「代数的組合せ論および有限群・頂点作用素代数とその表現の研究」, 京大数理研, December 2017.

[17] Y. Kawahigashi, Moonshine, conformal field theory and operator algebras, East Asian Core Doctoral Forum on Mathematics 2018, Tsinghua University (China), January 2018.

[18] Y. Kawahigashi, Topological phases of matter, modular tensor categories and gapped domain walls, 「トポロジカル相についての数学的研究」, 京大数理研, January 2018.

[19] Y. Kawahigashi, Operator algebras and vertex operator algebras in conformal field theory, 10th CFT Seminar: A Conference on Vertex Algebras and Related Topics, 京大数理研, April 2018.

[20] Y. Kawahigashi, Conformal field theory, vertex operator algebras and operator algebras, Operator Algebras at UCLA: A celebration of Masamichi Takesaki, UCLA (U.S.A.), April 2018.

[21] Y. Kawahigashi, Conformal field theory and operator algebras, Noncommutative Geometry and Representation Theory, Sichuan University (China), May 2018.

[22] Y. Kawahigashi, The relative Drinfeld commutant of a fusion category, orbifold subfactors and alpha-induction, AQFT: Where Operator Algebra Meets Microlocal Analysis,

Cortona (Italy), June 2018.

[23] Y. Kawahigashi, Algebraic quantum field theory and subfactors, The 14th Korean Operator Algebras Seminar, Busan (Korea), June 2018.

[24] Y. Kawahigashi, Conformal field theory, operator algebras and vertex operator algebras, XXXVII Workshop on Geometric Methods in Physics, Białowieża (Poland), July 2018.

[25] Y. Kawahigashi, The relative Drinfeld commutant of a fusion category, orbifold subfactors and alpha-induction, 18th Workshop: Noncommutative Probability, Operators Algebras, Random Matrices and Related Topics, with Applications, Będlewo (Poland), July 2018.

[26] Y. Kawahigashi, Conformal field theory, vertex operator algebras and operator algebras, International Congress of Mathematicians 2018, Rio de Janeiro (Brazil), August 2018.

[27] Y. Kawahigashi, Topological phases of matter, modular tensor categories and operator algebras, Quantum Computing Materials Challenges, IPAM (U.S.A.), August 2018.

[28] Y. Kawahigashi, The relative Drinfeld commutants and the relative Verlinde formula, Fusion Categories and Subfactors, Banff International Research Station (Canada). October 2018.

[29] Y. Kawahigashi, 作用素環とテンソル圏, トポロジカル相 I, II, 「物質のトポロジカル相の理論的探究」, 京都大学基礎物理学研究所, December 2018.

[30] Y. Kawahigashi, Topological phases of matter and subfactors, AMS Special Session on Quantum Symmetries: Subfactors and Fusion Categories, Joint Mathematics Meeting 2019, Baltimore (U.S.A.), January 2019.

[31] Y. Kawahigashi, Topological phases of matter, subfactors and the relative Verlinde formula, Subfactors in Sydney: Operator algebras, representation theory, quantum field theory, Sydney (Australia), February 2019.

[32] Y. Kawahigashi, Operator algebras and vertex operator algebras in conformal field theory, Higher structures in algebra, geometry, topology and quantum field theory, Preparatory workshop for a planned IRTG Hamburg-Tokyo, Hamburg (Germany), February 2019.

[33] Y. Kawahigashi, Operator algebras and vertex operator algebras in conformal field theory, Silver Workshop: Complex Geometry and Non-Commutative Geometry, Okinawa (Japan), February-March 2019.

[34] Y. Kawahigashi, Topological phases of matter and operator algebras, Quantum Mathematics, Okinawa (Japan), March 2019.

〔図書〕(計1件)

M. Bischoff, Y. Kawahigashi, R. Longo, K.-H. Rehren, Tensor categories and endomorphisms of von Neumann algebras (with applications to Quantum Field Theory), SpringerBriefs in Mathematical Physics Vol. 3, 2015. x+94 pp.

〔産業財産権〕

出願状況(計0件)

名称:

発明者:

権利者:

種類:

番号:

出願年:

国内外の別:

取得状況（計0件）

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
取得年：
国内外の別：

〔その他〕
ホームページ等
<http://www.ms.u-tokyo.ac.jp/~yasuyuki/>

6．研究組織

(1)研究分担者
なし．

(2)研究協力者
研究協力者氏名：泉正己
ローマ字氏名：Masaki Izumi
研究協力者氏名：小沢登高
ローマ字氏名：Narutaka Ozawa

研究協力者氏名：松井宏樹
ローマ字氏名：Hiroki Matui

科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属されます。